Ex1:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - 6x + 4\ln x$

1) a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 6x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 4\ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

$\boxed{\text{$\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées).}}$

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 6x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(x-6) = +\infty \quad \text{(par produit)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{donc} \lim\limits_{x \to +\infty} 4\ln x = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x} = \boxed{\frac{2(x^2 - 3x + 2)}{x}}$

b) f' est du signe du trinôme $x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui admet $x_1 = 1$ pour racine évidente (somme des coefficients nulle), puis on a :

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} \iff x_2 = 2$

Le coefficient dominant du trinôme étant positif, on obtient le tableau suivant :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-8+4\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1^2 - 6\times 1 + 4\times \ln 1$
$= 1 - 6 + 4\times 0$
$= -5$

$f(2) = 2^2 - 6\times 2 + 4\times \ln 2$
$= 4 - 12 + 4\ln 2$
$= -8 + 4\ln 2$

3) D'après le tableau de variations, f est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur $[4;5]$

On a $f(4) \simeq -2,45 < 0$ et $f(5) \simeq 1,44 > 0$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(x)=0$ admet $\boxed{\text{une unique solution sur } [4;5].}$

<u>Rem:</u> On a en réalité utilisé ici le corollaire du théorème de Bolzano.

4) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2} = \dfrac{2(x^2-2)}{x^2}$

ⓐ Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{2}{x^2} > 0$, f'' est du signe de x^2-2 sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \geqslant 0 \iff x^2-2 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 2 \iff x \geqslant \sqrt{2}$

⚠ car $x>0$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

inflexion

$A\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 2-6\sqrt{2}+2\ln 2\end{pmatrix}$

On a $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 4\ln\sqrt{2}$
$= 2-6\sqrt{2}+2\ln 2$

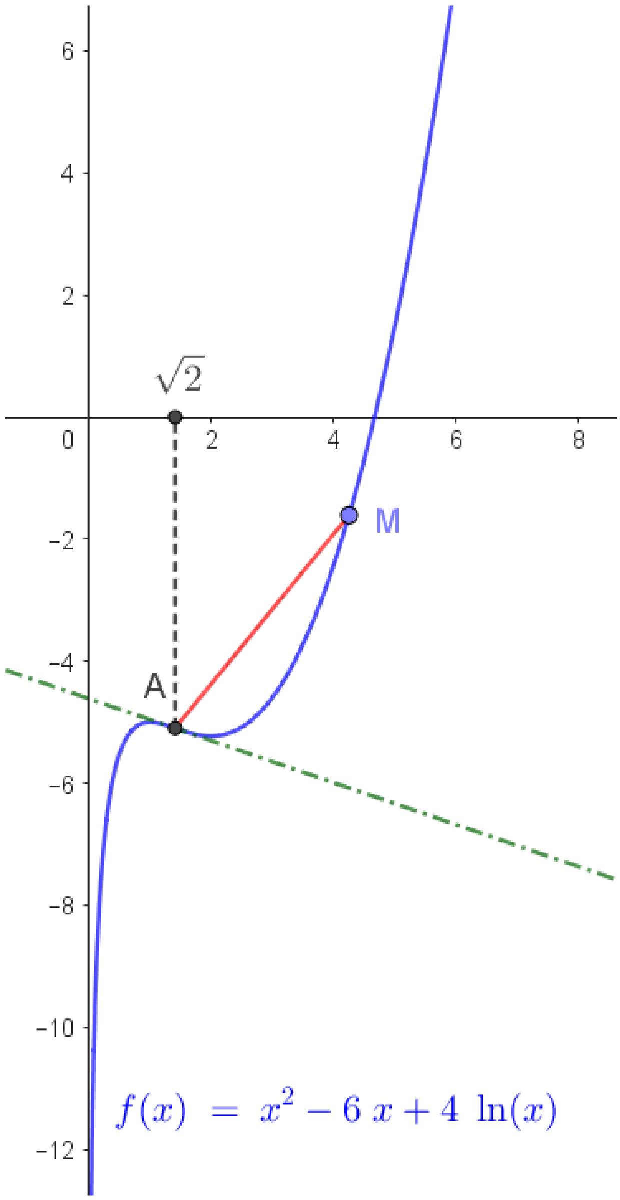
ⓑ $A \in \mathcal{C}_f$ est le point d'inflexion et M est un pt de $\mathcal{C}_f$ différent de A

Ainsi [AM] est une corde de $\mathcal{C}_f$.

Or on sait que : $\left\{\begin{array}{l}\text{une fonction convexe est toujours en dessous de ses cordes}\\ \text{—— concave —— au-dessus ——}\end{array}\right.$

D'où le tableau :

t	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f	‖	concave	convexe
Position relative	‖	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de [AM]	$\mathcal{C}_f$ en dessous de [AM]


6
4
2
$\sqrt{2}$
0
2
4
6
8
M
-2
-4
A
-6
-8
-10
$f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$
-12

Ex2 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 . e^x$ et $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) ⓐ $u_1 = u_0^{\,3} \times e^{u_0} = (-1)^3 \times e^{-1} = \boxed{-e^{-1} = \frac{-1}{e} \simeq -0{,}368}$ (à 10^{-3} près)

$u_2 = u_1^{\,3} \times e^{u_1} = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = \boxed{-e^{-3-e^{-1}} \simeq -0{,}034}$

(à 10^{-3} près)

ⓑ fonc(2) renvoie la valeur de u_2, i.e. $\boxed{-0{,}034}$ (arrondie à 10^{-3})

Rem : En toute rigueur, le script renvoie un message d'erreur car il faut au préalable importer la commande "exp" du module "math".

2) ⓐ On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 . e^x + x^3 . e^x = (x^3 + 3x^2) . e^x = x^2 . e^x (x+3)$

ⓑ

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		+		+	0	+	
e^x		+		+		+	
$x+3$		$-$	0	+		+	
$f'(x)$		$-$	0	+	0	+	
f	0	↘	$-27e^{-3}$	↗		↗	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0^-$ (th. croissances comparées)

$\left(\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \right) \Rightarrow$ par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^x = +\infty$

$f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27\, e^{-3}$

Rem : La dérivée nulle en 0 n'est pas un extremum local car elle ne change pas de signe en ce point. Il s'agit d'un point d'inflexion.

c) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$ $\qquad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -e^{-1} \simeq -0,368$

Donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$

On a (HR) : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$

f est strictement croissante sur $[-1;0]$

$\Rightarrow f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$

car $f(-1) = f(u_0) = u_1$ et $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$

$\Rightarrow u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$

car $u_1 \geqslant -1$

$\Rightarrow -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0}$

d) On a $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0 & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée par } 0 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell \leqslant 0}$

e) On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$

Puis $f(x) = x \iff x^3 . e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 e^x - 1 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = \alpha$

Or d'après la question 2.c), $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1;0]$

Comme $\alpha > \frac{1}{2}$, on ne peut pas retenir cette solution.

Donc $\boxed{\ell = 0}$

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a $\boxed{G\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ est normal à (EHI), donc (EHI) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 0y - 3z + d = 0 \iff 2x - 3z + d = 0$

On a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in (EHI)$, donc $2x_E - 3z_E + d = 0$

$\iff 2\times 0 - 3\times 1 + d = 0$

$\iff d = 3$

D'où (EHI) : $\boxed{2x - 3z + 3 = 0}$

3) Le triangle EIF est isocèle en I

I a donc pour abscisse $x_I = \frac{EF}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$

Puis $I\begin{pmatrix}3/2\\y_I\\z_I\end{pmatrix} \in (EHI)$ donc $2x_I - 3z_I + 3 = 0$

$\iff 3z_I = 2x_I + 3$

$\iff z_I = \frac{1}{3}\left(2\times\frac{3}{2} + 3\right)$

$\iff z_I = \frac{1}{3}\times 6$

$\iff z_I = 2$

De plus, on a $y_I = 0$ car $I \in (EIF)$ et $(EIF) = (AEB)$ d'équation $y = 0$

Donc $\boxed{I\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\2\end{pmatrix}}$

4) On a $\vec{IE}\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{IF}\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}$, d'où $\vec{IE}\cdot\vec{IF} = -\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} + 0\times 0 + (-1)\times(-1) = -\frac{9}{4} + 1 = \frac{-5}{4}$

De plus, $IE = \|\vec{IE}\| = \sqrt{\vec{IE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ et $IE = IF$

Puis $\vec{IE}\cdot\vec{IF} = IE \times IF \times \cos\widehat{EIF} \iff \cos\widehat{EIF} = \frac{\vec{IE}\cdot\vec{IF}}{IE\times IF} = -\frac{5}{4}\times\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{-5}{13}$

Enfin, $\widehat{EIF} = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{13}\right) \boxed{\simeq 113°}$ (au degré près)

5) a) Δ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$ et passe par $R\begin{pmatrix}6\\-3\\-1\end{pmatrix}$

Donc Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

b) $K\begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K\end{pmatrix} \in (BFG)\cap\Delta \iff \begin{cases} x_K = 3 \\ x_K = 6-3t_K \\ y_K = -3+4t_K \\ z_K = -1+t_K \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = 3 \\ t_K = \frac{1}{3}(6-x_K) = \frac{1}{3}(6-3) = 1 \\ y_K = -3+4t_K = -3+4\times 1 = 1 \\ z_K = -1+t_K = -1+1 = 0 \end{cases}$

D'où $\boxed{K\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}}$

c) Comme $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, on remarque que $\begin{cases} x_K = \frac{x_B+x_C}{2} \\ y_K = \frac{y_B+y_C}{2} \\ z_K = \frac{z_B+z_C}{2} \end{cases}$

Donc K est le milieu de $[BC]$, d'où $\boxed{K \in [BC]}$

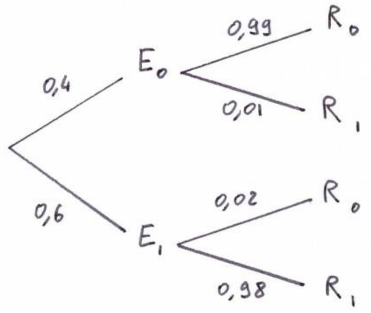
ou On a $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ qui dirige $[BC]$ et $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \in [BC]$

D'où la représentation paramétrique de $[BC]$: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} ,\ t \in [0;1]$ ⚠

On remarque alors que K est le point de $[BC]$ de paramètre $t = \frac{1}{2}$,

donc $\boxed{K \in [BC]}$

Ex 4 :



$\boxed{1)\ B}$

$P(E_0 \cap R_0) = P(E_0) \times P_{E_0}(R_0) = 0{,}4 \times 0{,}99 = 0{,}396$

$\boxed{2)\ C}$

$\{E_0 ; E_1\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R_0) = P(E_0 \cap R_0) + P(E_1 \cap R_0) &= 0{,}396 + P(E_1) \times P_{E_1}(R_0) \\ &= 0{,}396 + 0{,}6 \times 0{,}02 \\ &= 0{,}396 + 0{,}012 \\ &= 0{,}408 \end{aligned}$$

$\boxed{3)\ C}$

$$P_{R_1}(E_0) = \frac{P(E_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(E_0) \times P_{E_0}(R_1)}{1 - P(R_0)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}01}{1 - 0{,}408} = \frac{0{,}004}{0{,}592} \simeq 0{,}007$$

(à 10^{-3} près)

$\boxed{4)\ B}$

$P\big((E_0 \cap R_1) \cup (E_1 \cap R_0)\big) = P(E_0 \cap R_1) + P(E_1 \cap R_0) = 0{,}004 + 0{,}012 = 0{,}016$

$\boxed{5)\ D}$

$X \sim \mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}88)$

$P(X=7) = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (1-0{,}88)^{10-7} = 120 \times 0{,}88^7 \times 0{,}12^3 \simeq 0{,}085$

(à 10^{-3} près)

$\boxed{6)\ A}$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}88^0 \times 0{,}12^{10} = 1 - 0{,}12^{10}$

$\boxed{7)\ B}$

Désormais, $X \sim \mathcal{B}(N\ ;\ 0{,}88)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$

On veut $P(X=N) \geqslant 0{,}1$

$\iff \binom{N}{N} \times 0{,}88^N \times (1-0{,}88)^{N-N} \geqslant 0{,}1$

$\iff 1 \times 0{,}88^N \times 0{,}12^0 \geqslant 0{,}1$

$\iff 0{,}88^N \geqslant 0{,}1$

car ln strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(0{,}88^N) \geqslant \ln 0{,}1$

$\iff N \times \ln 0{,}88 \geqslant \ln 0{,}1$

car $\ln 0{,}88 < 0$

$\iff N \leqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}88}$

Or on a $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}88} \simeq 18{,}01$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc il faut $N_0 = 18$ (le plus grand entier inférieur ou égal à 18,01)

On peut vérifier que $0{,}88^{18} \simeq 0{,}1002 > 0{,}1$ et $0{,}88^{19} \simeq 0{,}09 < 0{,}1$