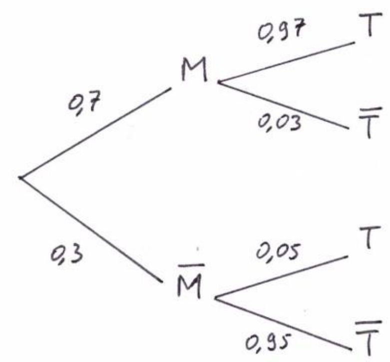
Ex 1 :

=> Partie A

1)



2) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$

$= 0,7 \times 0,97$

$= \boxed{0,679}$

3) $\{M ; \overline{M}\}$ forment un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$= 0,679 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$

$= 0,679 + 0,3 \times 0,05$

$= 0,679 + 0,015$

$= \boxed{0,694}$

4) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,679}{0,694} \boxed{\simeq 0,978}$ (à 10^{-3} près)

5) ⓐ $\boxed{P_{\overline{T}}(\overline{M})}$ est la valeur prédictive négative du test

Puis $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T})}{1 - P(T)} = \dfrac{0,3 \times 0,95}{1 - 0,694} = \dfrac{0,285}{0,306} = \dfrac{95}{102} \boxed{\simeq 0,931}$ (à 10^{-3} près)

ⓑ On observe que $\boxed{P_T(M) > P_{\overline{T}}(\overline{M})}$

Ceci signifie que le test donne une meilleure information quand le test est positif que lorsqu'il est négatif.

=> Partie B

1) ⓐ On répète $n = 5$ fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le coyote a un test positif" est égale à $p = P(T) = 0,694$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$: $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(5 ; 0,694)}$

ⓑ $P(X=1) = \binom{5}{1} \times p^1 \times (1-p)^{5-1} = 5 \times 0,694 \times 0,306^4 \boxed{\simeq 0,03}$ (à 10^{-2} près)

ⓒ $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0,484 \boxed{\simeq 0,516}$ (en utilisant la fonction de répartition)

On a $\boxed{P(X \geqslant 4) > 0,5 \text{ donc l'affirmation est vraie}}$

2) Désormais $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}694)$ avec $n \in \mathbb{N}$

On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$\iff 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$

$\iff P(X=0) \leqslant 0{,}01$

$\iff \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} \leqslant 0{,}01$

$\iff 1 \times 1 \times 0{,}306^n \leqslant 0{,}01$

$\iff \ln\left(0{,}306^n\right) \leqslant \ln 0{,}01$ par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0{,}306 \leqslant \ln 0{,}01$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}306}$ car $\ln 0{,}306 < 0$

or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}306} \simeq 3{,}89$ et $n \in \mathbb{N}$

Il faudra donc capturer $\boxed{\text{au moins 4 coyotes.}}$

Ex2 :

$\boxed{1)\ B}$

On observe :	x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
	$f'(x)$		$+$	0	$-$	
On déduit :	$f(x)$		↗		↘	

$\boxed{2)\ A}$ et $\boxed{3)\ C}$

	x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
On observe :	$f'(x)$		↗		↘	
On déduit :	f		convexe		concave	
	$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$\boxed{4)\ B}$

On peut trouver des exemples (et contre-exemples) de suites (v_n) qui convergent (suites constantes) et qui divergent (suites avec valeurs d'adhérence), donc A et D ne conviennent pas. Par ailleurs, la seule contrainte sur v_0 est : $v_0 \leqslant w_0$, donc ceci élimine C.

Pour la réponse B, on a : (u_n) croissante $\Rightarrow$ (u_n) minorée par u_0

et comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

On a finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Par transitivité, on voit que (v_n) est minorée par u_0.

$\boxed{5)\ B}$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$

Toute suite constante négative convient, ce qui élimine les réponses C et D.

Puis, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, on en déduit que (u_n) est croissante (pas strictement, donc éventuellement constante).

Par ailleurs, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$, et donc majorée par son premier terme qui vaut 1. Ainsi, par transitivité, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 \implies (u_n)$ majorée par 1.

Comme (u_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge. Ceci valide la réponse B et exclut la A.

$\boxed{6)\ B}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < u_n < n+1$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

(u_n) est donc divergente de 1ère espèce, ce qui exclut les réponses C (convergente) et D (divergente de 2ème espèce).

Par ailleurs, u_n est toujours <u>strictement</u> compris entre deux entiers successifs, donc u_n ne sera jamais entier. Ceci exclut la réponse **A**.

Enfin, on a : $0 < u_0 < 1 < u_1 < 2 < u_2 < 3 < \dots$

ou plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < u_n < n+1 < u_{n+1} < n+2$

Par transitivité, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ donc (u_n) est strictement croissante

C'est donc la réponse B qui convient le mieux (même si elle manque de précision).

On remarquera que : (u_n) strict. croissante $\implies (u_n)$ croissante, mais la réciproque est fausse

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $\boxed{E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } K\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}}$

2) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}1\\1/2\\-1\end{pmatrix}$ ainsi que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = 2\times1+(-2)\times1+1\times0 = 2-2+0=0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{EG} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EK} = 2\times1+(-2)\times\frac{1}{2}+1\times(-1) = 2-1-1=0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{EK} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires dirigeant le plan (EGK)

donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (EGK)}$

3) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ normal à (EGK) donc (EGK) a une équation cartésienne de la forme : $2x-2y+z+d=0$

Puis $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in(EGK)$ donc $2x_E-2y_E+z_E+d=0$

$\iff 2\times0-2\times0+1+d=0$

$\iff d=-1$

Ainsi (EGK) a pour éq. cartésienne : $\boxed{2x-2y+z-1=0}$

4) $(d)\perp(EGK)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ normal à (EGK) est directeur de (d)

De plus, $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in(d)$

D'où (d) a pour représentation paramétrique :

$$\boxed{(d) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$$

5) On a $(LF) = (d)$ et $(d) \perp (EGK)$, donc $L \in (d) \cap (EGK)$

D'où $\begin{cases} 2x_L - 2y_L + z_L - 1 = 0 \\ x_L = 1 + 2t_L \\ y_L = -2t_L \\ z_L = 1 + t_L \end{cases}$

$\Rightarrow 2(1+2t_L) - 2\times(-2t_L) + (1+t_L) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2 + 4t_L + 4t_L + \cancel{1} + t_L - \cancel{1} = 0$

$\Rightarrow 9t_L + 2 = 0$

$\Rightarrow t_L = -\frac{2}{9}$

Puis $\begin{cases} x_L = 1+2t_L = 1+2\times\frac{-2}{9} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \\ y_L = -2t_L = -2\times\frac{-2}{9} = \frac{4}{9} \\ z_L = 1+t_L = 1+\frac{-2}{9} = \frac{7}{9} \end{cases}$ on a bien $\boxed{L\begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}}$

Rem: Les coordonnées de L étant données dans l'énoncé, on pouvait se contenter de montrer que ces coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (EGK) et la représentation paramétrique de (d)

6) Dans le R.O.N., on a $L\begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LF}\begin{pmatrix} 4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$

Puis $LF = \|\overrightarrow{LF}\| = \sqrt{\overrightarrow{LF}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{-4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9^2} + \frac{16}{9^2} + \frac{4}{9^2}} = \sqrt{\frac{36}{9^2}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$

7) Le triangle EFG est rectangle en F

Donc $\mathcal{A}_{EFG} = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1\times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$ (u.a.)

Puis en appelant I le proj. orth. de K sur [FG], on a [IK] la hauteur du tétraèdre EFGK relative à la base EFG (triangle)

On a $IK = FB = 1$

Donc $\mathcal{V}_{EFGK} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{EFG} \times IK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$ (u.v.)

8) On a $\begin{cases} (FL) \perp (EGK) \\ L \in (FL) \perp (EGK) \end{cases}$ donc $[FL]$ est la hauteur du tétraèdre EFGK relative à la base EGK

D'où $\mathcal{V}_{EFGK} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{EGK} \times FL$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{EGK} = \frac{3 \cdot \mathcal{V}_{EFGK}}{FL} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{6}} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ (u.a.)}$$

9) On a $\begin{cases} P \text{ milieu de } [EG] \\ M \text{ milieu de } [EK] \\ N \text{ milieu de } [GK] \end{cases} \Rightarrow$ Dans le triangle EGK, on montre avec la réciproque du théorème de Thalès que $(PN)//(EK)$; $(MN)//(EG)$ et $(MP)//(GK)$. Puis on applique directement le théorème de Thalès pour obtenir $NP = \frac{1}{2} EK$; $MN = \frac{1}{2} EG$ et $MP = \frac{1}{2} GK$

On peut montrer de différentes manières que les triangles EGK et MNP sont semblables de rapport : $k = \frac{1}{2}$ (nous avons ici choisi le th. de Thalès)

Ainsi, $\mathcal{A}_{MNP} = k^2 \times \mathcal{A}_{EGK} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ (u.a.)

Comme $(EGK) = (MNP)$, la hauteur du tétraèdre MNPF relative à la base MNP est la même que la hauteur du tétraèdre EFGK relative à la base EGK, i.e. le segment $[LF]$

D'où $\mathcal{V}_{FPMN} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{MNP} \times LF = \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{16}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \boxed{\frac{1}{24}}$ (u.v.)

Ex4 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} f(x) = 0{,}06\left(-x^2 + 13{,}7x\right) \\ g(x) = \left(-0{,}15x + 2{,}2\right)e^{0{,}2x} - 2{,}2 \end{cases}$

1) ⓐ f est une fonction polynôme du second degré qui se comporte en $+\infty$ comme son monome de plus haut degré (dominant)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0{,}06\left(-x^2+13{,}7x\right) = \lim_{x\to+\infty} -0{,}06x^2 = \boxed{-\infty}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et on multiplie par $-0{,}06 < 0$

ⓑ f est une fonction polynôme du second degré, concave car son coefficient dominant $-0{,}06$ est négatif.

Le sommet est atteint en $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{\cancel{-0{,}06} \times 13{,}7}{2 \times (\cancel{-0{,}06})} = 6{,}85$

ou f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 0{,}06\left(-2x + 13{,}7\right)$

Puis $f'(x) \geqslant 0 \iff 0{,}06(-2x + 13{,}7) \geqslant 0$

$\iff -2x + 13{,}7 \geqslant 0$

$\iff 2x \leqslant 13{,}7$

$\iff x \leqslant 6{,}85$

D'où

x	0		$6{,}85$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(6{,}85)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = 0{,}06\left(-0^2 + 13{,}7 \times 0\right) = 0$

ⓒ $f(x) = 0 \iff 0{,}06\left(-x^2 + 13{,}7x\right) = 0$

$\iff -x^2 + 13{,}7x = 0$

$\iff -x\left(x - 13{,}7\right) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 13{,}7$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0 ; 13{,}7\}}$

2) (a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}2x = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0{,}2x} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}15x + 22 = -\infty$

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

(b) On admet dans l'énoncé que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = -0{,}15 \times e^{0{,}2x} + (-0{,}15x + 2{,}2) \times 0{,}2 \times e^{0{,}2x} - 0$$
$$= (-0{,}15 - 0{,}2 \times 0{,}15x + 2{,}2 \times 0{,}2)\, e^{0{,}2x}$$
$$= (-0{,}15 - 0{,}03x + 0{,}44)\, e^{0{,}2x}$$
$$= \boxed{(-0{,}03x + 0{,}29)\, e^{0{,}2x}}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{0{,}2x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-0{,}03x + 0{,}29$

D'où $g'(x) \geqslant 0 \iff -0{,}03x + 0{,}29 \geqslant 0 \iff 0{,}03x \leqslant 0{,}29 \iff x \leqslant \frac{29}{3}$

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq 2{,}98$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = (-0{,}15 \times 0 + 2{,}2)\, e^{0{,}2 \times 0} - 2{,}2$
$= 2{,}2 \times 1 - 2{,}2$
$= 0$

et $\boxed{g\left(\frac{29}{3}\right) \simeq 2{,}98}$ (à 10^{-2} près)

(d) $\forall x \in \left]0 ; \frac{29}{3}\right],\ g(x) > 0$ donc aucune solution sur cet intervalle

Sur $\left]\frac{29}{3} ; +\infty\right[$, g est continue et strictement décroissante

On a $0 \in g\left(\left]\frac{29}{3} ; +\infty\right[\right)$ donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\exists!\, \alpha \in \left]\frac{29}{3} ; +\infty\right[,\ g(\alpha) = 0$

Nous venons de démontrer par disjonction de cas que : $\boxed{\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ g(\alpha) = 0}$ ⚠

Par balayage, on obtient : $\alpha \in]13{,}724 ; 13{,}725[$ donc $\boxed{\alpha \simeq 13{,}72}$ (à 10^{-2} près)

=> Partie B :

1) ⓐ En utilisant les résultats de la partie A.1), on sait que f atteint son maximum en $x = 6,85$ et $f(6,85) = 2,81535$

L'unité étant la dizaine de yards, la hauteur maximale atteinte par la balle est de $\boxed{28,1535 \text{ yards.}}$ (environ 28 yards)

ⓑ D'après la partie précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 0,06(-2x + 13,7)$

Donc $f'(0) = 0,06(-2 \times 0 + 13,7) = 0,06 \times 13,7 = \boxed{0,822}$

ⓒ D'après l'énoncé, $\tan(d) = f'(0) = 0,822$

On lit dans le tableau que $\boxed{d \simeq 39,4°}$

ⓓ f étant une fct polynôme du second degré, $\mathcal{C}_f$ est une parabole qui admet pour $\boxed{\text{axe de symétrie}}$ la droite d'éq : $x = \frac{-b}{2a}$ i.e. $x = 6,85$

2) ⓐ D'après la partie A.2), on sait que g atteint son maximum en $\frac{29}{3}$ et que $g\left(\frac{29}{3}\right) \simeq 2,98$ donc la hauteur maximale est d'environ $\boxed{29,8 \text{ yards.}}$

ⓑ On a $\tan(d) = g'(0) = 0,29$ donc le tableau donne $\boxed{d \simeq 16,2°}$

ⓒ On a $g'(13,7) \simeq -1,87$ et d'après l'énoncé, $\tan(a) = -g'(13,7) \simeq 1,87$

→ Puis $a = \tan^{-1}(\tan(a)) \simeq \tan^{-1}(1,87) \boxed{\simeq 62°}$

(ou)

→ $\tan(62) \simeq 1,88 > 1,87$ et $\tan(61) \simeq 1,80 < 1,87$ donc $\boxed{a \simeq 62°}$

=> Partie C

Aucun modèle ne satisfait pleinement, mais l'écart entre les valeurs observées et les valeurs calculées est moins important pour le second modèle à chaque fois. $\boxed{\text{Le second modèle semble donc le plus adapté,}}$ même s'il n'est pas vraiment satisfaisant.