Ex 1 :

⇒ Partie A : $\forall t \in [0;10]$, $f(t) = 3t \cdot e^{-0{,}5t+1}$

1) ⓐ On admet que $f$ est dérivable sur $[0;10]$

$$\forall t \in [0;10],\ f'(t) = 3\left(1 \times e^{-0{,}5t+1} + t \times (-0{,}5) \times e^{-0{,}5t+1}\right)$$
$$= 3\,e^{-0{,}5t+1}\,(1 - 0{,}5t)$$
$$= \boxed{3\,(-0{,}5t+1)\,e^{-0{,}5t+1}}$$

ⓑ $\forall t \in [0;10]$, $3e^{-0{,}5t+1} > 0$ donc $f'$ est du signe de $-0{,}5t+1$

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-0{,}5t+1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $0$ | ↗ | $6$ | ↘ | $30e^{-4}$ |

fct affine de coeff. dir. négatif

Avec $f(0) = 3 \times 0 \times e^{-0{,}5\times 0+1} = 0$

$f(2) = 3 \times 2 \times e^{-0{,}5\times 2+1} = 6e^{0} = 6 \times 1 = 6$

$f(10) = 3 \times 10 \times e^{-0{,}5\times 10+1} = 30\,e^{-4}$ ($\simeq 0{,}55$ pour vérification sur le graphique)

ⓒ D'après cette modélisation, la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale au bout de $t = \boxed{2 \text{ heures}}$.

Cette quantité sera alors de $\boxed{6 \text{ mg}}$

2) ⓐ La fonction $f$ est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur $[0;2]$

De plus, on a $f(0)=0$ et $f(2)=6$, donc $5 \in [0;6]$ i.e. $5 \in [f(0);f(2)]$

D'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(t)=5$

$\boxed{\text{admet une unique solution } \alpha \in [0;2].}$

Par balayage, on a : $f(1) \simeq 4,95$ et $f(1,1) \simeq 5,18$ donc $\alpha \in ]1;1,1[$

puis $f(1,02) \simeq 4,995$ et $f(1,03) \simeq 5,019$ donc $\alpha \in ]1,02;1,03[$

puis $f(1,022) \simeq 4,9997$ et $f(1,023) \simeq 5,0021$ donc $\alpha \in ]1,022;1,023[$

On a $1,022 < \alpha < 1,023$ d'où $\boxed{\alpha \simeq 1,02}$ (à $10^{-2}$ près)

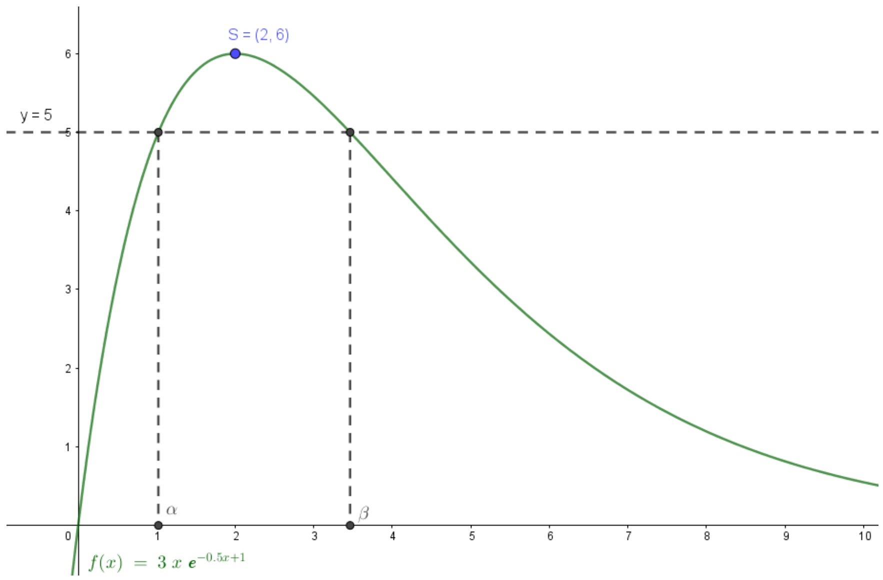
ⓑ D'après les questions précédentes, le médicament est efficace entre

$t = \alpha \simeq 1,02$ et $t = \beta \simeq 3,46$, donc pendant une durée

égale à $\Delta t = \beta - \alpha \simeq 3,46 - 1,02 \simeq 2,44$ h

Puis comme $0,44 \text{ h} = \frac{44}{100} \text{ h} = \frac{44}{10\cancel{0}} \times 6\cancel{0} \text{ min} = \frac{264}{10} \text{ min} = 26,4 \text{ min}$

Le médicat sera donc efficace pendant $\boxed{\text{environ 2 h et 26 minutes}}$



=> Partie B

1) Au bout d'une heure, juste avant l'injection la quantité de médicament aura diminué de 30% , donc il restera $u_0 - 0{,}3 \times u_0 = 2 - 0{,}3 \times 2 = 2 - 0{,}6 = 1{,}4$ mg

Puis on rajoute 1,8 mg lors de l'injection , donc $u_1 = 1{,}4 + 1{,}8 = \boxed{3{,}2 \text{ mg}}$

2) A la $(n+1)^{\text{ème}}$ heure, juste avant l'injection, il reste $1 - 0{,}3 = 70\%$ de la quantité de médicament précédente, puis on injecte 1,8 mg.

Nous sommes donc dans le cadre d'une suite arithmético-géométrique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0{,}7 \cdot u_n + 1{,}8}$$

⚠ inégalité stricte

3) (a) Démontrons par récurrence $P(n)$ : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1} < 6$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{0+1} = u_1 = 3{,}2 \end{cases} \Rightarrow u_0 \leqslant u_1 < 6 \Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$

et montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$

D'après (HR), on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \Rightarrow 0{,}7\, u_n \leqslant 0{,}7 u_{n+1} < 0{,}7 \times 6$

$\Rightarrow 0{,}7 u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7\, u_{n+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6 \quad \Rightarrow P(n+1)$ vraie

Conclusion : $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1} < 6}$

(b) D'après la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc $(u_n)$ est croissante

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$ donc $(u_n)$ est majorée (par 6)

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $\ell \leqslant 6$ ⚠ L'inégalité stricte ne résiste pas au passage à la limite

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \longmapsto 0{,}7x + 1{,}8$ continue sur $\mathbb{R}$

Par unicité de la limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \iff \lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

(th. du point fixe)

$$\iff g(\ell) = \ell$$
$$\iff 0{,}7\ell + 1{,}8 = \ell$$
$$\iff 0{,}3\ell = 1{,}8$$
$$\iff \ell = \frac{1{,}8}{0{,}3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$$

Ceci signifie que la quantité de médicament dans le sang du patient va $\boxed{\text{croître jusqu'à une limite de 6 mg}}$ (sans jamais l'atteindre).

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 - u_n$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8) = 6 - 0{,}7u_n - 1{,}8 = -0{,}7u_n + 4{,}2$
$$= 0{,}7(-u_n + 6)$$
$$= 0{,}7 \cdot v_n$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}7}$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = \boxed{4}$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{4 \times 0{,}7^n}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n \iff \boxed{u_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n}$

c) Recherchons pour quelles valeurs de $n$ on a $u_n \geqslant 5{,}5$ mg

$$u_n \geqslant 5{,}5 \iff 6 - 4 \times 0{,}7^n \geqslant 5{,}5$$
$$\iff 4 \times 0{,}7^n \leqslant 0{,}5$$
$$\iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}125$$
$$\iff \ln(0{,}7^n) \leqslant \ln 0{,}125 \quad \text{) stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$
$$\iff n \ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}125 \quad \text{) car } \ln 0{,}7 < 0$$
$$\iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}7}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}7} \simeq 5{,}8$

On aura donc réalisé $\boxed{n = 6 \text{ injections}}$ en appliquant ce protocole.

Ex 2 :

Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ , on a : $A\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=2+2t\end{cases}$ , $t\in\mathbb{R}$

On admet que $A\notin\mathcal{D}$

1) a) D'après la représentation paramétrique, $\mathcal{D}$ admet $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$ pour vecteur directeur.

b) Vérifions que $B\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$ en déterminant son paramètre $t_B$.

$$\begin{cases}x_B=1+2t_B\\y_B=2-t_B\\z_B=2+2t_B\end{cases}\iff\begin{cases}-1=1+2t_B\\3=2-t_B\\0=2+2t_B\end{cases}\iff\begin{cases}2t_B=-2\\t_B=2-3\\2t_B=-2\end{cases}\iff\begin{cases}t_B=-1\\t_B=-1\\t_B=-1\end{cases}$$ compatibles

Donc $\boxed{B\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\text{ est le point de }\mathcal{D}\text{ de paramètre }t=-1}$

c) Dans le R.O.N. , on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ , d'où :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\times2+2\times(-1)+(-3)\times2=0-2-6=\boxed{-8}$$

2) a) $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ directeur de $\mathcal{D}$ est normal à $\mathcal{P}$

D'où $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $2x-y+2z+d=0$

Puis $A\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\iff 2x_A-y_A+2z_A+d=0\iff 2\times(-1)-1+2\times3+d=0$

$\iff -2-1+6+d=0$

$\iff d=-3$

D'où $\mathcal{P}$ : $\boxed{2x-y+2z-3=0}$

ou $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\iff\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0\iff 2(x+1)+(-1)\times(y-1)+2(z-3)=0$

$\iff 2x+2-y+1+2z-6=0$

$\iff \boxed{2x-y+2z-3=0}$

ⓑ $H \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} 2x_H - y_H + 2z_H - 3 = 0 \\ x_H = 1+2t_H \\ y_H = 2 - t_H \\ z_H = 2+2t_H \end{cases}$

$\Rightarrow 2(1+2t_H) - (2-t_H) + 2(2+2t_H) - 3 = 0$

$\Rightarrow \cancel{2} + 4t_H - \cancel{2} + t_H + 4 + 4t_H - 3 = 0$

$\Rightarrow 9t_H + 1 = 0$

$\Rightarrow t_H = -\frac{1}{9}$

D'où $\begin{cases} x_H = 1+2t_H = 1 + 2\times\frac{-1}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 2 - t_H = 2 + \frac{-1}{9} = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = 2+2t_H = 2+2\times\frac{-1}{9} = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9} \end{cases}$ $\Rightarrow$ On a bien $\boxed{H\begin{pmatrix} 7/9 \\ 19/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}}$

<u>Rem:</u> Les coordonnées de H étant données dans l'énoncé, on aurait également pu vérifier que : $H \in \mathcal{P}$ <u>et</u> $H \in \mathcal{D}$

ⓒ Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} 7/9 \\ 19/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 16/9 \\ 10/9 \\ -11/9 \end{pmatrix}$

Puis $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{-11}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256+100+121}{9^2}} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \boxed{\frac{\sqrt{53}}{3}}$

3) ⓐ On a $\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ B \in \mathcal{D} \\ \vec{u} \text{ directeur de } \mathcal{D} \end{cases}$, donc $\overrightarrow{HB}$ est colinéaire à $\vec{u}$ $\iff \boxed{\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{HB} = k\vec{u}}$

ⓑ H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \vec{u} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{HB}$
(avec $k \neq 0$ car $\overrightarrow{HB} \neq \vec{0}$)

D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{k}.\overrightarrow{HB}\right)$

$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HB}$ car H est le proj. orth. de A sur $\mathcal{D} = (HB)$

$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\cancel{k}}.(\cancel{k}\vec{u}).(k.\vec{u})$ car $\overrightarrow{HB} = k.\vec{u}$

$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = k.\vec{u}^2$

$\iff \boxed{k = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}}$

Rem : La rédaction précédente n'est pas optimisée mais privilégie la compréhension.

On pouvait plus directement écrire en précisant que A se projette orthogonalement en H sur $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{HB}\cdot\vec{u} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (k.\vec{u})\cdot\vec{u} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = k.\vec{u}^2 \iff k = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

ou Rel. Chasles : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot\vec{u} = \underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}}_{0 \text{ car } \overrightarrow{AH}\perp\vec{u}} + \overrightarrow{HB}\cdot\vec{u} = 0 + (k.\vec{u})\vec{u} = k.\|\vec{u}\|^2$

c) On a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}^2 = 2^2+(-1)^2+2^2 = 4+1+4 = 9$

et d'après la question 1.c), $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = -8$

D'où $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \boxed{\dfrac{-8}{9}}$

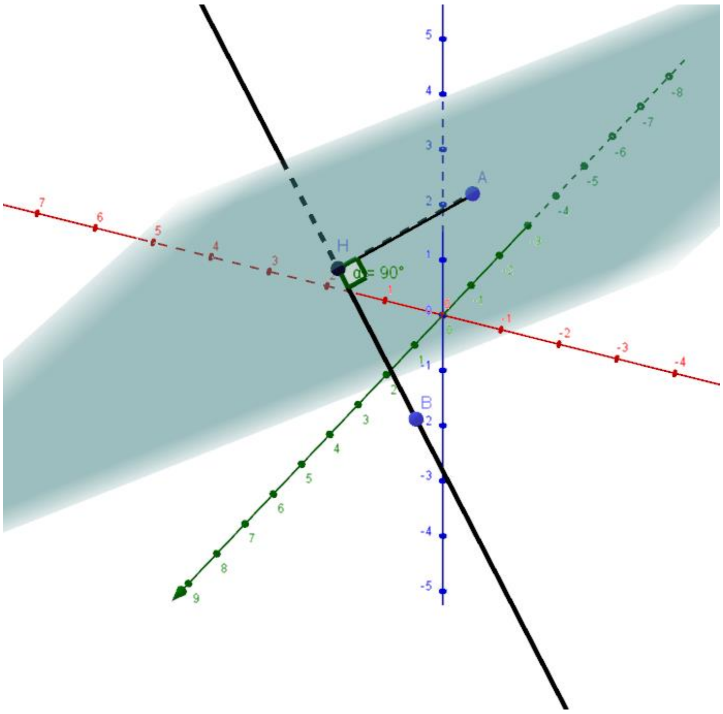
Puis $\overrightarrow{HB} = k.\vec{u} \iff \overrightarrow{HB} = -\dfrac{8}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_B - x_H = -\frac{16}{9} \\ y_B - y_H = \frac{8}{9} \\ z_B - z_H = -\frac{16}{9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 - x_H = -\frac{16}{9} \\ 3 - y_H = \frac{8}{9} \\ 0 - z_H = -\frac{16}{9} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_H = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$$

On retrouve bien les coordonnées de $\boxed{H\begin{pmatrix}7/9\\19/9\\16/9\end{pmatrix}}$




4) On a : $\begin{cases} A \in \mathcal{P} \\ H \in \mathcal{P} \\ C \in \mathcal{P} \end{cases} \implies ACH \in \mathcal{P}$

De plus, comme $(HB) \perp \mathcal{P}$, le segment $[HB]$ est la hauteur du tétraèdre ABCH relative à la base ACH.

Ainsi, $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ACH} \times HB \iff \mathcal{A}_{ACH} = \frac{3 \times V_{ABCH}}{HB}$

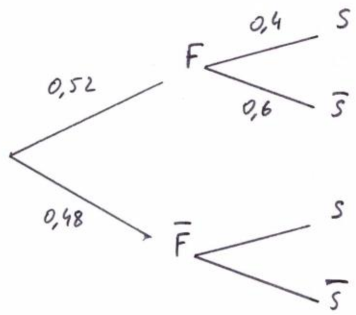
Or $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$ donc $HB = \|\overrightarrow{HB}\| = |k| \times \|\vec{u}\| = \left|\frac{-8}{9}\right| \times \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \frac{8}{9} \times \sqrt{9} = \frac{8 \times \cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{8}{3}$

Finalement, $\mathcal{A}_{ACH} = \frac{3 \times V_{ABCH}}{HB} = \frac{\cancel{3}^{1} \times \frac{8}{\cancel{9}_{3}}}{\frac{8}{3}} = \frac{\cancel{\frac{8}{3}}}{\cancel{\frac{8}{3}}} = \boxed{1}$ (u.a)

Ex3:

1) ⓐ D'après l'énoncé, $\boxed{P(S) = 0,25}$

ⓑ




ⓒ $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S)$

$= 0,52 \times 0,4$

$= \boxed{0,208}$

ⓓ $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,208}{0,25} = 0,832$

ⓔ On cherche $P_{\overline{F}}(S) = \dfrac{P(\overline{F} \cap S)}{P(\overline{F})}$ et on veut montrer que $P_{\overline{F}}(S) < 0,1$

On sait que $\{F ; \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S) \iff P(\overline{F} \cap S) = P(S) - P(F \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$

Puis $P_{\overline{F}}(S) = \dfrac{P(\overline{F} \cap S)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,042}{0,48} = \dfrac{42}{480} = \dfrac{7}{80} = 0,0875 < 0,1$

**Ceci justifie l'affirmation du directeur.**

2) ⓐ On répète de façon identique et indépendante (tirage avec remise) $n = 20$ fois une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le salarié a suivi le stage" est égale à $p = P(S) = 0,25$. Donc $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$. $\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(20 ; \frac{1}{4}\right)}$

ⓑ $P(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times p^5 \times (1-p)^{20-5} = 15504 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \boxed{\simeq 0,202}$ (à $10^{-3}$ près)

ⓒ Le programme renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(X = k) = P(X \leqslant 5)$

En utilisant la fonction de répartition sur la calculatrice, on trouve $\boxed{P(X \leqslant 5) \simeq 0,617}$ (à $10^{-3}$ près)

d) On cherche : $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \simeq 1 - 0,617 \boxed{\simeq 0,383}$
(à $10^{-3}$ près)

3) On a : 25% des salariés qui ont une augmentation de 5% $= 0,05$
75% ——————————— 2% $= 0,02$

L'augmentation moyenne est donc de : $0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,02 = 0,0125 + 0,015$
$= 0,0275$
$= \boxed{2,75\ \%}$

Ex 4 :

$\boxed{1)\ C}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = -2$$

La limite était par ailleurs identique en $-\infty$

Donc la droite d'équation $y=-2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\boxed{2)\ D}$

En dérivant les fonctions proposées, on obtient :

$$F_a'(x) = \frac{1}{2}\left(2x\, e^{(x^2)} + x^2 \times 2x \cdot e^{(x^2)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} x\, e^{(x^2)} \times (1+x^2) \neq f(x) \qquad \times$$

$$F_b'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} x \cdot e^{(x^2)} = x \cdot e^{(x^2)} = f(x) \quad \text{et} \quad F_b(0) = \frac{1}{2} e^{(0^2)} = \frac{1}{2} \neq 1 \qquad \times$$

$$F_c'(x) = 4x \cdot e^{(x^2)} + (1+2x^2) \times 2x \times e^{(x^2)} = 2x\, e^{(x^2)}(2+1+2x^2) \neq f(x) \qquad \times$$

$$F_d'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} x \times e^{(x^2)} + 0 = x \cdot e^{(x^2)} = f(x) \quad \text{et} \quad F_d(0) = \frac{1}{2} e^{(0^2)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \checkmark$$

$\boxed{3)\ C}$

La représentation graphique de $\mathcal{C}_{f'}$ indique que $f'$ est croissante sur $[0;2]$, donc $f$ est convexe sur $[0;2]$. Les autres réponses sont exclues car $f'$ est croissante puis décroissante sur les intervalles indiquées, donc $f$ change de convexité sur ces intervalles.

$\boxed{4)\ A}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ donc ses primitives sont toutes (strictement) croissantes sur $\mathbb{R}$

$\boxed{5) \ D}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$

or $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{2 \ln x}{3x^2+1} = \dfrac{2 . \ln x}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{2}{3+\frac{1}{x^2}} \times \dfrac{\ln x}{x^2}$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ puis par opérations : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{3+0} = \dfrac{2}{3}$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0^+$ (th. des croissances comparées)

D'où par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times 0^+ = 0^+$

$\boxed{6) \ C}$

$(E)$: $e^{2x} + e^x - 12 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 12 = 0 \iff X^2 + X - 12 = 0$ et $X = e^x$

En remarquant que $X_1 = 3$ est racine évidente, on a : $X_1 . X_2 = \frac{-12}{1} \iff X_2 = \frac{-12}{3} = -4$

D'où $(E) \iff \begin{cases} X = 3 \text{ ou } X = -4 \\ X = e^x \end{cases} \iff e^x = 3$ ou $e^x = -4$ ← impossible car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

$\iff x = \ln 3$

Donc $\mathcal{S} = \{\ln 3\}$

<u>Rem:</u> On pouvait également étudier la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + e^x - 12$

$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0$

Donc $f$ est strictement croissante. Par ailleurs, $f$ est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+ + 0^+ - 12 = -12$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'où $f(\mathbb{R}) = ]-12 ; +\infty[$ et $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc d'après le théorème de la bijection : $\exists! \, \alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha) = 0$