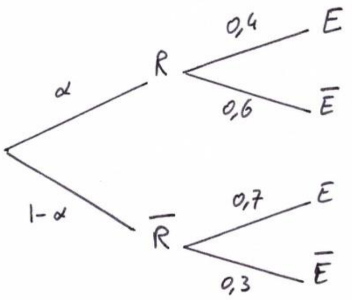
Ex 1 :

1)



2) a) $\{R ; \overline{R}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\overline{R} \cap E) = P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E)$$

$$= \alpha \times 0{,}4 + (1-\alpha) \times 0{,}7$$

$$= 0{,}4\alpha + 0{,}7 - 0{,}7\alpha$$

$$= \boxed{0{,}7 - 0{,}3\alpha}$$

b) On a : $P(E) = 0{,}58 \iff 0{,}7 - 0{,}3\alpha = 0{,}58 \iff 0{,}3\alpha = 0{,}12 \iff \alpha = \frac{0{,}12}{0{,}3} = \frac{12}{30} = \boxed{\frac{4}{10} = 0{,}4}$

3) $P_E(\overline{R}) = \dfrac{P(\overline{R} \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E)}{P(E)} = \dfrac{(1-0{,}4) \times 0{,}7}{0{,}58} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}7}{0{,}58} = \dfrac{0{,}42}{0{,}58} = \dfrac{42}{58} \boxed{= \dfrac{21}{29} \simeq 0{,}72}$

(à 10^{-2} près)

4) $\boxed{P(\overline{R} \cap E) = 0{,}42}$ (voir calcul à la question précédente, au numérateur)

5) a)

On a
$$\begin{cases} P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = \alpha \times 0{,}4 = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16 \\ P(R \cap \overline{E}) = P(R) \times P_R(\overline{E}) = \alpha \times 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 \\ P(\overline{R} \cap E) = 0{,}42 \\ P(\overline{R} \cap \overline{E}) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(\overline{E}) = (1-\alpha) \times 0{,}3 = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18 \end{cases}$$

D'où la loi de probabilité de X :

x_k	25	35	40	50
$P(X = x_k)$	0,24	0,18	0,16	0,42
	$(R \cap \overline{E})$	$(\overline{R} \cap \overline{E})$	$(R \cap E)$	$(\overline{R} \cap E)$

ⓑ $E(X) = \sum_{k=1}^{4} x_k \times P(X=x_k) = 25\times0{,}24 + 35\times0{,}18 + 40\times0{,}16 + 50\times0{,}42 \boxed{= 39{,}7}$

Pour un grand nombre de locations, un vélo loué rapportera en moyenne 39,70 € au loueur.

6) ⓐ On répète $n=30$ fois de manière identique et indépendante (choix assimilé à un tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le vélo loué est électrique" est égale à $p = P(E) = 0{,}58$

Donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}58$, i.e $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(30\,;0{,}58)}$

ⓑ $P(Y=20) = \binom{30}{20} \times p^{20} \times (1-p)^{30-20} = 30\,045\,015 \times 0{,}58^{20} \times 0{,}42^{10} \boxed{\simeq 0{,}095}$ (à 10^{-3} près)

ⓒ On veut : $P(X \geqslant 15)$

Or $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X < 15)$

$= 1 - P(X \leqslant 14)$

On utilise la fonction de répartition de la calculatrice.

$\simeq 1 - 0{,}142$

$\boxed{\simeq 0{,}858}$ (à 10^{-3} près)

Ex 2 :

$\boxed{1)\ B}$

Soient (a_n) et (b_n) tq $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 1 \\ b_n = a_n - 2 \end{cases}$

La suite (a_n) est arithmético-géométrique, ce qui exclut les réponses A et C.

On pourra s'en assurer en calculant :

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}5\, a_0 + 1 = 0{,}5 \times 1 + 1 = 1{,}5 \\ a_2 = 0{,}5\, a_1 + 1 = 0{,}5 \times 1{,}5 + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75 \end{cases}$$

Puis $\begin{cases} a_1 - a_0 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5 \\ a_2 - a_1 = 1{,}75 - 1{,}5 = 0{,}25 \end{cases}$ $\Rightarrow$ (a_n) n'est pas arithmétique car $a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1$

Et $\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \\ \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1{,}75}{1{,}5} = \dfrac{7}{6} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (a_n) n'est pas géométrique car $\dfrac{a_1}{a_0} \neq \dfrac{a_2}{a_1}$

D'autre part, on a :

$$\begin{cases} b_0 = a_0 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ b_1 = a_1 - 2 = 1{,}5 - 2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = a_2 - 2 = 1{,}75 - 2 = -0{,}25 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ceci exclut la réponse D

Puis $\begin{cases} b_1 - b_0 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \\ b_2 - b_1 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (b_n) n'est pas arithmétique car $b_1 - b_0 \neq b_2 - b_1$

Rem : Très logiquement ici, $\begin{cases} a_1 - a_0 = b_1 - b_0 \\ a_2 - a_1 = b_2 - b_1 \end{cases}$

Prouvons alors que (b_n) est géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5\, a_n + 1 - 2 = 0{,}5\, a_n - 1 = 0{,}5\, a_n - 0{,}5 \times 2 = 0{,}5(a_n - 2) = 0{,}5\, b_n$

Ainsi, (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Rem : Comparer $\dfrac{b_1}{b_0}$ et $\dfrac{b_2}{b_1}$ ne constitue pas une preuve mais permet seulement de conjecturer.

$\boxed{2)\ C}$

Soient (u_n) et (v_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

On a $\begin{cases} u_1 = u_0 + 3v_0 = 2 + 3\times 1 = 2+3 = 5 \\ v_1 = u_0 + v_0 = 2+1 = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_2 = u_1 + 3v_1 = 5 + 3\times 3 = 5+9 = 14 \\ v_2 = u_1 + v_1 = 5+3 = 8 \end{cases}$

Ceci exclut la réponse A

Puis $\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$ => réponse C

On teste éventuellement les autres propositions :

$\begin{cases} 5u_1 = 5\times 5 = 25 \\ 3v_1 = 3\times 3 = 9 \end{cases}$ => $5u_1 \neq 3v_1$, ce qui exclut la réponse D.

$u_2^2 - 3v_2^2 = 14^2 - 3\times 8^2 = 196 - 3\times 64 = 196 - 192 = 4 \neq -2^2 = -4$ ce qui exclut B.

$\boxed{3)\ D}$

On rappelle que l'instruction "range" en langage Python a sa borne supérieure ouverte.

Ainsi, l'instruction "range(1 ; n)" effectue en réalité des itérations dans $[\![1 ; n-1]\!]$.

L'instruction "range(1 ; 11)" effectuera donc $10-1+1 = 10$ itérations.

Les valeurs d'entrée saisies pour u et v étant u_0 et v_0, après 10 itérations, le script renvoie u_{10} et v_{10} (réponse D).

On remarquera que, les suites (u_n) et (v_n) étant imbriquées, il a été nécessaire d'introduire une 3ᵉ variable "c" qui permet de conserver la valeur de u_n dans le calcul de v_{n+1}.

Une autre solution aurait été de travailler sous la forme d'un couple, en écrivant :

u, v = u+3*v , u+v à la place des 3 lignes dans la boucle "for".

$\boxed{4)\ B}$

On voit sur le graphe que f' est croissante sur $[-4;0]$ et décroissante sur $[0;2]$

Comme sur un intervalle donné, on a $\begin{cases} f' \text{ croissante} \Leftrightarrow f \text{ convexe} \\ f' \text{ décroissante} \Leftrightarrow f \text{ concave} \end{cases}$, on peut

directement conclure.

$\boxed{5)\ D}$

Le coefficient directeur m de (BC) est $f''(1)$ car $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{C}'$

D'où $f''(1) = m = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{5-0}{0-1} = -5$ $\Rightarrow$ Réponse D

Rem: Comme $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{C}'$, on a $f'(1) = 0$ qui permet d'exclure les réponses A et B.

De plus, f est concave sur $[0;2]$ donc $f''(1) \leqslant 0$, excluant la réponse C.

$\boxed{6)\ B}$

On dérive les fonctions F proposées sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que $F(0) = 1$

Tout d'abord, pour les propositions A et D, on a $F(0) \neq 1$, donc à exclure :

$$\begin{cases} F_A(0) = (0^2 - 2\times 0 + 3)\times e^0 = 3\times 1 = 3 \neq 1 \\ F_D(0) = \left(\frac{1}{3}\times 0^3 + 0\right)\times e^0 = 0\times 1 = 0 \neq 1 \end{cases}$$

Puis on dérive sur $\mathbb{R}$ les propositions B et C : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} F_B'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+3)e^x + 0 = (x^2 \cancel{-2x} \cancel{+2x} + 3 - 2)e^x = (x^2+1)\cdot e^x = f(x) \\ F_C'(x) = (x^2+1)e^x + \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x + 0 = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1\right)e^x \neq f(x) \end{cases}$$

Ex3 :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x - x \ln x$

1) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ (th. des croissances comparées)

Puis par somme : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^+ - 0^- = \boxed{0^+}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

On lève l'indétermination en factorisant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x(1 - \ln x)$

On a ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$

Enfin, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

3) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - (\ln(x) + 1) = 1 - \ln(x) + 1 = \boxed{-\ln x}$

ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \geqslant 0 \iff -\ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 0 \iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

$f(1) = 1 - 1 \times \ln 1 = 1 - 0 = 1$

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff x - x\ln(x) - x = 0 \iff -x \ln x = 0 \iff x \ln x = 0$

Or on veut $x \neq 0$ (car $x \in \mathbb{R}_+^*$), donc $f(x) = x \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

⇒ Partie B : Soit (u_n) : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n \cdot \ln u_n = f(u_n)$

1) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}847$

On a bien $0{,}5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$, supposons que $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

et montrons que $0{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

On a $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ (HR)

$\Rightarrow f(0{,}5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$) par croissance de f sur $[0{,}5 ; 1]$

$\Rightarrow 0{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$ car $f(1) = 1$ et $f(0{,}5) \simeq 0{,}847 > 0{,}5$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$

2) a) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1 & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 1$.

b) (u_n) converge et sa fonction associée f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi, (u_n) converge vers un point fixe, i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

D'après la partie A, question 4), on en conclut que $\boxed{\ell = 1}$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

$\Rightarrow$ Partie C : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = k.x - x.\ln x$

1) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = k - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = k - 1 - \ln x$

Puis $f_k'(x) \geqslant 0 \iff k-1-\ln x \geqslant 0$

$\iff \ln x \leqslant k-1$

$\iff x \leqslant e^{k-1}$) par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

D'où le tableau de variations:

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	y_k	$\searrow$	

Ainsi, f_k admet bien un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$

2) $\forall k \in \mathbb{R}$, $y_k = f(x_k)$

$= f\left(e^{k-1}\right)$

$= k.e^{k-1} - e^{k-1} \times \ln\left(e^{k-1}\right)$

$= e^{k-1}.\left(k - (k-1)\right)$

$= e^{k-1} \times (k - k + 1)$

$= e^{k-1}$

$\boxed{= x_k}$

Ex 4 :

1) a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3+t \\ z = 3+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$ dirige $\mathcal{D}'$

b) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ qui dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ qui dirige $\mathcal{D}'$ ne sont pas colinéaires car $\forall k \in \mathbb{R}$, $\vec{u'} \neq k\vec{u}$

Donc les droites $\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ ne sont pas parallèles.}}$

c) $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$, d'où la représentation paramétrique :

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+2t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

2) a) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ dans le R.O.N. :

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{u'} = 2\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0-1+1 = 0 & \text{donc } \vec{v} \perp \vec{u'} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} = 2\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 0 = 2-2+0 = 0 & \text{donc } \vec{v} \perp \vec{u} \end{cases}$$

$\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ qui dirigent respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, donc $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ dirige la droite } \Delta}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

3) a) Soit $\mathcal{P} = (A;\vec{u},\vec{v})$ et soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u} = 2\times 1 + (-1)\times 2 + (-5)\times 0 = 2-2+0 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{u} \\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 2\times 2 + (-1)\times(-1) + (-5)\times 1 = 4+1-5 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires qui dirigent $\mathcal{P}$, donc

$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix} \text{ est normal à } \mathcal{P}.}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $2x - y - 5z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

Puis $A\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff 2x_A - y_A - 5z_A + d = 0$

$\iff 2\times 2 - 4 - 5\times 0 + d = 0$

$\iff 4 - 4 - 0 + d = 0$

$\iff d = 0$

D'où $\boxed{\mathcal{P} : \ 2x - y - 5z = 0}$

c) M' est le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$

Or $\Delta \subset \mathcal{P}$

Donc M' est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}'$

Puis $M'\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}' \iff \begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

$\Rightarrow 2\times 3 - (3+t) - 5(3+t) = 0$

$\Rightarrow 6 - 6(3+t) = 0$

$\Rightarrow 1 - (3+t) = 0$

$\Rightarrow -2 - t = 0$

$\Rightarrow t = -2$

M' est donc le point de $\mathcal{D}'$ de paramètre $t = -2$

D'où $M' \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t = 3 - 2 = 1 \\ z = 3 + t = 1 \end{cases}$ i.e. $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D}' = \left\{ M'\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \right\}}$

4) a) On sait que $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ et $M'\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \in \Delta$

D'où $\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$

b) On sait que $\Delta \cap \mathcal{D} = \{M\}$

Donc les coordonnées du point M doivent vérifier les représentations paramétriques de Δ et $\mathcal{D}$

$$M\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} x_M = 3+2t_M \\ y_M = 1-t_M \\ z_M = 1+t_M \end{cases} \iff \begin{cases} 3+2t_M = 1 \\ 1-t_M = 2 \\ 1+t_M = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_M = \frac{1}{2}(1-3) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1 \\ t_M = 1-2 = -1 \\ t_M = -1 \end{cases}$$

compatibles

$$M\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x_M = 2+t_M \\ y_M = 4+2t_M \\ z_M = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2+t_M = 1 \\ 4+2t_M = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_M = 1-2 = -1 \\ t_M = \frac{1}{2}(2-4) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1 \end{cases}$$

compatibles

Ainsi, M est le point de Δ de paramètre -1 et le point de $\mathcal{D}$ de paramètre -1.

Donc on a bien : $\boxed{M\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}$ (Une autre solution de résolution est proposée en fin d'exercice.)

Rem : le fait que M ait le même paramètre (-1) sur Δ et $\mathcal{D}$ n'était pas nécessaire. Il s'agit ici d'une coïncidence.

c) On rappelle que $\Delta = (MM')$, avec $M\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N., on a :

$$MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{\overrightarrow{MM'}^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \boxed{\sqrt{6}} \text{ u.l.}$$

Rem 1 : Il s'agit de la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$.

Rem 2 : On a ici $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$ mais on rappelle que tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$ aurait convenu pour définir un vecteur $\vec{v}$ directeur de Δ.
Ainsi, il n'était pas envisageable de calculer la distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ à partir de la norme de $\vec{v}$.

5) a) Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de d et on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$.

Dans le R.O.N., $\vec{w}\cdot\vec{n} = 5\times 2 + 5\times(-1) + 1\times(-5) = 10-5-5 = 0$ donc $\vec{w} \perp \vec{n}$

Ainsi, $\boxed{d \,//\, \mathcal{P}}$

(b) Comme $\ell = dist(N ; \mathcal{P})$, il s'agit de la longueur de la hauteur du tétraèdre $ANMM'$ issue de A, i.e. relative à la base triangulaire AMM', car on a $\mathcal{P} = (AMM')$

Par ailleurs, $\begin{cases} \mathcal{D} = (AM) \\ \Delta = (MM') \\ \mathcal{D} \perp \Delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ le triangle AMM' est rectangle en M.

D'où $\mathcal{A}_{AMM'} = \frac{1}{2} \cdot AM \times MM'$

De plus, comme $A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$ u.l.

Finalement, $\mathcal{V}_{ANMM'} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{AMM'} \times \ell = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AM \times MM' \times \ell = \frac{1}{6}\sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \ell = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \ell}$ (u.v.)

(c) On sait que $d \,//\, \mathcal{P}$.

Soient N_1 et N_2 des points de d.

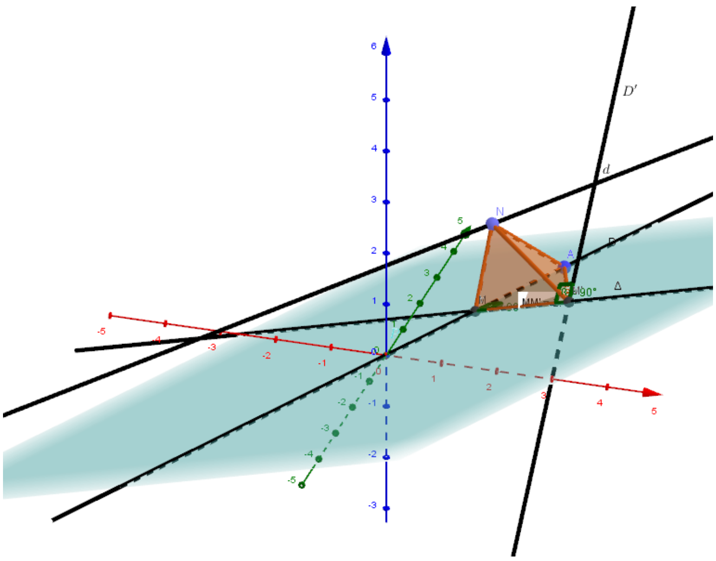
Nommons N_1' et N_2' leur projeté orthogonal respectif sur $\mathcal{P}$.

On a forcément $N_1N_1' = N_2N_2' = \ell$ car la distance d'un point de la droite d au plan $\mathcal{P}$ est constante (car $d \,//\, \mathcal{P}$).

Ainsi, la distance ℓ ne dépend pas du point N_i choisi.

Ceci justifie que $\boxed{\mathcal{V}_{AN_1MM'} = \mathcal{V}_{AN_2MM'}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \ell$ (u.v.)

Pour s'en convaincre, on pourra ouvrir le fichier Geogebra en pièce jointe de ce document et déplacer le point N avec la souris en le faisant glisser le long de la droite d. Vous constaterez alors dans la partie « algèbre » que la valeur de l'aire $a = 1.17$ ne varie pas. Pour information, il s'agit en réalité d'une valeur approchée et non d'une valeur exacte, mais ceci ne change en rien à la propriété démontrée.



Remarque : Concernant la question 4.b), on pouvait également déterminer l'intersection de Δ et de $\mathcal{D}$, puis comparer aux coordonnées proposées dans l'énoncé. Il s'agissait d'ailleurs de l'unique solution si les coordonnées de M n'étaient pas données.

=> Attention : Il fallait absolument penser à donner deux noms différents pour les paramètres de Δ et de $\mathcal{D}$.

$$\Delta \cap \mathcal{D} : \begin{cases} 3+2t = 2+s \\ 1-t = 4+2s \\ 1+t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 1+2t \\ 2s = -3-t \\ t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 1+2\times(-1) = -1 \\ s = \frac{1}{2}(-3-(-1)) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

compatibles

Pour rappel, le fait que les deux paramètres soient égaux est ici un cas particulier. A ne pas prendre pour une généralité.

Puis, en prenant l'une ou l'autre des représentations :

$$\begin{cases} x_M = 3+2t_M = 3+2\times(-1) = 1 \\ y_M = 1-t_M = 1-(-1) = 2 \\ z_M = 1+t_M = 1+(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_M = 2+s_M = 2+(-1) = 1 \\ y_M = 4+2s_M = 4+2\times(-1) = 2 \\ z_M = 0 \end{cases}$$