BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) **Thèmes : fonctions, suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$.

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

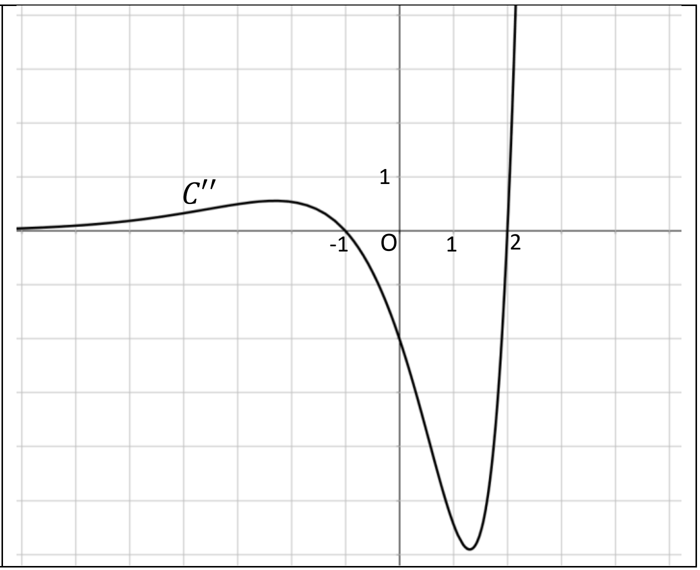
a. $x = 2$; **b.** $y = 2$; **c.** $y = 0$; **d.** $x = -1$.

2.

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle C sa représentation graphique.

On désigne par f'' la dérivée seconde de f.

On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe de f'', notée C'' .



a. C admet un unique point d'inflexion ;

b. f est convexe sur l'intervalle $[-1; 2]$;

c. f est convexe sur $]-\infty\,; -1]$ et sur $[2\,; +\infty[$;

d. f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

La suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$, est :

a. arithmétique de raison -2 ; **b.** géométrique de raison -2 ;

c. arithmétique de raison 1 ; **d.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 - \frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2 ; **b.** converge vers 1 ; **c.** diverge vers $+\infty$; **d.** n'a pas de limite.

5. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Une primitive F de f sur $]0;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$; **b.** $F(x) = \frac{1}{3}x^3(\ln x - 1)$;

c. $F(x) = \frac{1}{3}x^2$; **d.** $F(x) = \frac{1}{3}x^2(\ln x - 1)$.

6. Pour tout réel x, l'expression $2 + \frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}$ est égale à :

a. $\frac{5-3e^x}{1+e^x}$; **b.** $\frac{5+3e^x}{1-e^x}$; **c.** $\frac{5+3e^x}{1+e^x}$; **d.** $\frac{5-3e^x}{1-e^x}$.

Exercice 2 (7 points) **Thème : probabilités**

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70% des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60% visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite.

On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

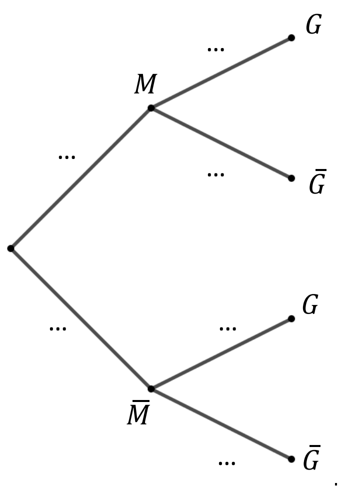
- M l'événement : « le client visite le musée » ;
- G l'événement : « le client visite la grotte ».

On note $\bar{M}$ l'événement contraire de M, $\bar{G}$ l'événement contraire de G, et pour tout événement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.

Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(\bar{M} \cap \bar{G}) = 0{,}06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\bar{M}}(\bar{G}) = 0{,}2$, où $p_{\bar{M}}(\bar{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



c. Quelle est la probabilité de l'événement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

d. Montrer que $p(G) = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

a. Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de T.

c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ? On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

Exercice 3 (7 points) **Thèmes : fonctions logarithme et exponentielle, suites**

Les parties A et B sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

3. Soit k un nombre réel positif ou nul.

a. Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;e]$.

b. Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n)$$

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n), et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 4 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;-1\,;3)$, $B(1\,;1\,;2)$, $C(1\,;-1\,;7)$.
On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1\,;6\,;8)$ et $E(11\,;-9\,;2)$.

1. a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

c. Le point $F(1{,}36\,;-1{,}7\,;-0{,}7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2.a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

3.a. Montrer que le point $G(7; -4; 4)$ appartient à la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4.a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.