Ex 1 :

$\boxed{1)\ B}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ F.I. du type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ "

Levons l'indétermination :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{2X}{X+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{2X}{X} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Par composition, on a } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$$

Donc $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ la droite d'éq $y = 2$ pour asymptote horizontale.

Rem : On pouvait aussi factoriser par e^x (qui revenait également à multiplier le numérateur et le dénominateur par e^{-x})

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+e^{-x})} = \frac{2}{1+e^{-x}}$$

Puis on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+e^{-x} = 1$ (par somme)

Et enfin par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$

$\boxed{2)\ C}$

On lit :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

inflexion

Ce tableau élimine les réponses A, B et D

$\boxed{3)\ D}$

On a (u_n) : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$ ← suite arithmético-géométrique

et (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 2$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2} u_n - 1 = \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2} v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$\boxed{4)\ B}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 + 0 = 1$ (par somme)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 2 - 1 = 1$ (par différence)

Puis on conclut avec le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

$\boxed{5)\ A}$

On dérive sur $\mathbb{R}_+^*$ les 4 fonctions F proposées. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

ⓐ $F'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + x^3 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(3x^2 \ln x \cancel{-x^2} \cancel{+x^2}\right) = x^2 \ln x$ ✓

ⓑ $F'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2(\ln x - 1) + x^3 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(3x^2 \ln x - 3x^2 + x^2\right) = \frac{3x^2 \ln x - 2x^2}{3}$ ✗

ⓒ $F'(x) = \frac{2}{3} x$ ✗

ⓓ $F'(x) = \frac{1}{3}\left(2x(\ln x - 1) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(2x \ln x - 2x + x\right) = \frac{2x \ln x - x}{3}$ ✗

$\boxed{6)\ A}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = 2 + \frac{e^x(3e^{-x} - 5)}{e^x(e^{-x} + 1)} = 2 + \frac{3 - 5e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{2(1 + e^x) + 3 - 5e^x}{1 + e^x}$$

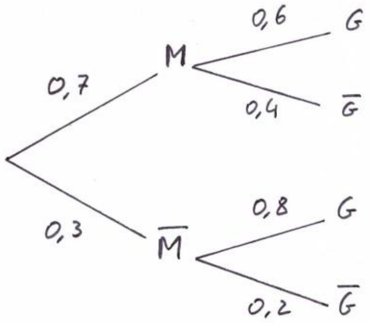
$$= \frac{2 + 2e^x + 3 - 5e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$$

Ex 2 :

1) ⓐ $P_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap \overline{G})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0{,}06}{1-P(M)} = \dfrac{0{,}06}{1-0{,}7} = \dfrac{0{,}06}{0{,}3} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} = \boxed{0{,}2}$

ⓑ



ⓒ $P(\overline{M} \cap G) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(G)$

$= 0{,}3 \times 0{,}8$

$= \boxed{0{,}24}$

ⓓ $\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements (partition de l'univers)

D'après la formule des probabilités totales,

$P(G) = P(M \cap G) + P(\overline{M} \cap G) = P(M) \times P_M(G) + 0{,}24 = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}24 = 0{,}42 + 0{,}24 \boxed{= 0{,}66}$

2) $P_G(M) = \dfrac{P(M \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{7}{11} > \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{donc le responsable dit vrai.}}$

3) ⓐ Il y a 4 cas possibles :

$\overline{M} \cap \overline{G}$: 0 € ; $\overline{M} \cap G$: 5 € ; $M \cap \overline{G}$: 12 € ; $M \cap G$: 12+5 = 17 €

D'où la loi de probabilité de T :

t_k	0	5	12	17
$P(T = t_k)$	0,06	0,24	0,28	0,42

ⓑ $E(T) = \sum_k \left(t_k \times P(T = t_k)\right) = 0 \times 0{,}06 + 5 \times 0{,}24 + 12 \times 0{,}28 + 17 \times 0{,}42 = \boxed{11{,}7 \text{ €}}$

ⓒ En nommant n le nombre de clients nécessaires, on a l'inéquation :

$n \times E(T) > 700 \iff n > \dfrac{700}{11{,}7}$ or $\dfrac{700}{11{,}7} = 59{,}8$ et $n \in \mathbb{N}$

Donc il faut $\boxed{n = 60}$

4) On nomme x le nouveau prix d'entrée de la grotte.

On veut $E(T) = 15$

$\iff 0 \times 0{,}06 + x \times 0{,}24 + 12 \times 0{,}28 + (12+x) \times 0{,}42 = 15$

$\iff 0{,}24x + 3{,}36 + 5{,}04 + 0{,}42x = 15$

$\iff 0{,}66x = 6{,}6$

$\iff x = \dfrac{6{,}6}{0{,}66}$

$\iff x = 10$ le prix de la grotte doit passer à $\boxed{10\text{ €}}$

5) Notons X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de clients de l'hôtel ayant visité la grotte.

On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " le client a visité la grotte " vaut $P(G) = 0{,}66$.

D'où $X \sim \mathcal{B}(100\,;\,0{,}66)$ ← loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}66$

On veut : $P(X \geqslant 75) = 1 - P(X < 75) = 1 - P(X \leqslant 74) \boxed{\simeq 0{,}034}$ (à 10^{-3} près)

On passe de préférence par la fonction de répartition

Ex3 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\forall x \in [1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1) On a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+}$ (th. croissances comparées)

2) ⓐ On admet que f est dérivable sur $[1;+\infty[$

$\forall x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \boxed{\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$

ⓑ Soit $x \in [1;+\infty[$, on sait $x^2 > 0$ sur cet intervalle, donc :

$f'(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1-\ln x}{x^2} \geqslant 0 \iff 1-\ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1 \iff x \leqslant e$

$\boxed{\text{Ceci justifie le tableau de signes.}}$ On pourra éventuellement détailler le jour du bac les 3 cas : $f'(x)>0$; $f'(x)=0$ et $f'(x)<0$

ⓒ

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0^+

Avec : $\begin{cases} f(1) = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \\ f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1} \end{cases}$

3) ⓐ f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1;e]$

De plus, d'après le tableau de variations, $f([1;e]) = [f(1); f(e)] = [0; \frac{1}{e}]$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), tout réel $k \in [0; \frac{1}{e}]$ possède un unique antécédent sur $[1;e]$, i.e que $\boxed{\text{l'équation } f(x)=k \text{ , } k \in [0;\tfrac{1}{e}] \text{, possède une unique solution sur } [1;e].}$

ⓑ D'après le tableau de variations, $\frac{1}{e}$ est le maximum de f sur $[1;+\infty[$

Donc $\boxed{\text{si } k > \tfrac{1}{e} \text{ , l'éq. } f(x)=k \text{ n'admet aucune solution sur } [1;+\infty[}$

⇒ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{\frac{x}{4}}$

et (u_n) : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$

1) La fct g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} > 0$ donc $\boxed{g \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}}$

Rem : On pourrait également dire que g est la composée de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq e$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = g(u_0) = g(1) = e^{\frac{1}{4}} > e^0 = 1$

Comme $e^{\frac{1}{4}} < e^1 = e$, on a bien $u_0 \leq u_1 \leq e$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leq u_{n+1} \leq e$

et montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e$

On a $u_n \leq u_{n+1} \leq e$ (HR)

$\Rightarrow g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(e)$ par (stricte) croissance de g sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e^{\frac{e}{4}}$

Or on a $\frac{e}{4} \simeq 0{,}68 < 1$ donc par composition $e^{\frac{e}{4}} < e$

Puis par transitivité : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e^{\frac{e}{4}} < e$ ⇒ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq e}$$

3) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée (par } e) \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant e$

4) On admet que ℓ est solution de l'équation $e^{\frac{x}{4}} = x$ $\quad (E)$

Or $(E) \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}} = x \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{x}{4}}\right) = \ln x \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{4}$

D'où $(E) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{4}}$

5) D'après la question A.3.a), on sait que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[1; e]$ si $k \in [0; e^{-1}]$, avec $e^{-1} \simeq 0{,}37$

Comme $\frac{1}{4} \in [0; e^{-1}]$, (E) admet une unique solution $\ell \in [1; e]$

Puis on procède par balayage à l'aide de la calculatrice :

On a : $f(1{,}4) < 0{,}25$ et $f(1{,}5) > 0{,}25$ donc $\ell \in [1{,}4 ; 1{,}5]$

puis $f(1{,}42) < 0{,}25$ et $f(1{,}43) > 0{,}25$ donc $\ell \in [1{,}42 ; 1{,}43]$

enfin, $f(1{,}429) < 0{,}25$ et $f(1{,}430) > 0{,}25$ donc $\ell \in [1{,}429 ; 1{,}43]$

D'où $\boxed{\ell \simeq 1{,}43}$ (à 10^{-2} près)

Ex 4 :

Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}-1\\6\\8\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}11\\-9\\2\end{pmatrix}$

1) a) $\Delta = (DE)$ donc tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$ dirige Δ,

en particulier $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ car $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$

Comme $D\begin{pmatrix}-1\\6\\8\end{pmatrix} \in \Delta$, on a donc :

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \Delta \iff \overrightarrow{DM} = t \times \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x+1 = 4t \\ y-6 = -5t \\ z-8 = -2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $\iff \boxed{\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$

b) On a $\Delta' \parallel \Delta$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ dirige Δ', et comme $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \Delta'$, on a :

$$\boxed{\Delta' : \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

c) Testons l'appartenance de $F\begin{pmatrix}1,36\\-1,7\\-0,7\end{pmatrix}$ à Δ' :

$F \in \Delta' \iff \begin{cases} x_F = 4t_F \\ y_F = -5t_F \\ z_F = -2t_F \end{cases} \iff \begin{cases} 1,36 = 4t_F \\ -1,7 = -5t_F \\ -0,7 = -2t_F \end{cases} \iff \begin{cases} t_F = \frac{1,36}{4} = 0,34 \\ t_F = \frac{-1,7}{-5} = 0,34 \\ t_F = \frac{-0,7}{-2} = 0,35 \end{cases}$ incompatibles

Donc $\boxed{F\begin{pmatrix}1,36\\-1,7\\-0,7\end{pmatrix} \notin \Delta'}$

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires (présence du 0 dans la 2e coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ et pas dans celle de $\overrightarrow{AB}$)

Donc $\boxed{\text{les points } A\,;\,B \text{ et } C \text{ définissent le plan } (ABC)}$ car ils ne sont pas alignés

ⓑ Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 2\times 4 + 2\times(-5) + (-1)\times(-2) = 8-10+2 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} = 2\times 4 + 0\times(-5) + 4\times(-2) = 8+0-8 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AC}\perp\vec{u} \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires dirigeant le plan (ABC), donc $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).

Comme $\vec{u}$ dirige Δ, on en conclut que $\boxed{\Delta \perp (ABC)}$

ⓒ $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $4x-5y-2z+d=0$

Puis $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\in(ABC) \iff 4x_A-5y_A-2z_A+d=0$

$$\iff 4\times(-1)-5\times(-1)-2\times 3+d=0$$
$$\iff -4+5-6+d=0$$
$$\iff -5+d=0$$
$$\iff d=5$$

D'où (ABC) : $\boxed{4x-5y-2z+5=0}$

3) ⓐ

$$G\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}\in\Delta \iff \begin{cases} x_G=-1+4t_G \\ y_G=6-5t_G \\ z_G=8-2t_G \end{cases} \iff \begin{cases} 7=-1+4t_G \\ -4=6-5t_G \\ 4=8-2t_G \end{cases} \iff \begin{cases} 4t_G=8 \\ 5t_G=10 \\ 2t_G=4 \end{cases} \iff \begin{cases} t_G=\frac{8}{4}=2 \\ t_G=\frac{10}{5}=2 \\ t_G=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{G\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix} \text{ est le point de } \Delta \text{ de paramètre } t=2}$

(b) On a $\begin{cases} \Delta \perp (ABC) \\ G \in \Delta \end{cases} \Rightarrow H \in \Delta \cap (ABC)$

D'où $\begin{cases} 4x_H - 5y_H - 2z_H + 5 = 0 \\ x_H = -1 + 4t_H \\ y_H = 6 - 5t_H \\ z_H = 8 - 2t_H \end{cases}$ $\Rightarrow 4(-1+4t_H) - 5(6-5t_H) - 2(8-2t_H) + 5 = 0$

$\Rightarrow -4 + 16t_H - 30 + 25t_H - 16 + 4t_H + 5 = 0$

$\Rightarrow 45t_H - 45 = 0$

$\Rightarrow t_H = 1$

Puis $\begin{cases} x_H = -1 + 4t_H = -1 + 4\times 1 = 3 \\ y_H = 6 - 5t_H = 6 - 5\times 1 = 1 \\ z_H = 8 - 2t_H = 8 - 2\times 1 = 6 \end{cases}$ i.e : $\boxed{H\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}$

(c) Comme H est le projeté orthogonal de G sur le plan (ABC), on a, avec $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d(G; (ABC)) = GH = \|\overrightarrow{GH}\| = \sqrt{\overrightarrow{GH}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45} = \sqrt{9\times 5}$

$\Leftrightarrow \boxed{d(G; (ABC)) = 3\sqrt{5}}$ (u.l.)

4) (a) Dans le R.O.N., avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\times 2 + 2\times 0 + (-1)\times 4 = 4 + 0 - 4 = 0$ d'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

$\boxed{\text{Le triangle ABC est bien rectangle en A}}$

Rem : On pouvait aussi utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

(b) Comme $\begin{cases} (ABC) \perp \Delta \\ \Delta = (HG) \\ \Delta \cap (ABC) = \{H\} \end{cases}$, [HG] est la hauteur du tétraèdre ABCG relatif à la base ABC, triangle rectangle en A.

D'où $V_{ABCG} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \times HG = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AB \times AC \times HG$

Or $\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \text{ (u.l.)} \\ AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (u.l.)} \end{cases}$

D'où $V_{ABCG} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{3} \times \cancel{2}\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 3 \times 5 = \boxed{15}$ (u.v.)