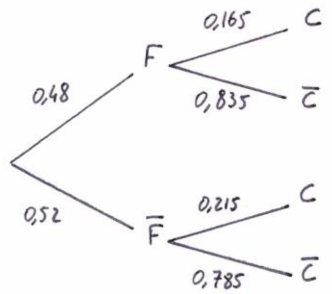
Ex 1 :

1)



2) $P(F \cap C) = P(F) \times P_F(C) = 0,48 \times 0,165 = \boxed{0,0792}$

3) ⓐ $\{F ; \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(F \cap C) + P(\overline{F} \cap C) = 0,0792 + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(C)$$
$$= 0,0792 + 0,52 \times 0,215$$
$$= 0,0792 + 0,1118$$
$$= \boxed{0,191}$$

ⓑ On a $\begin{cases} P(C) = 0,191 \\ P_F(C) = 0,165 \end{cases} \Rightarrow P(C) \neq P_F(C) \Rightarrow$ $\boxed{\text{C et F ne sont pas indépendants}}$

4) $P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,0792}{0,191} \boxed{\simeq 0,4147}$ (à 10^{-4} près)

La probabilité de choisir un salarié femme sachant que ce salarié est cadre est d'environ 0,4147.

5) ⓐ On répète $n = 15$ fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le salarié est un cadre" est égale à $p = P(C) = 0,191$. Ainsi X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(15 ; 0,191)}$

ⓑ $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} \times p^0 \times (1-p)^{15-0} + \binom{15}{1} \times p^1 \times (1-p)^{15-1}$

$$= 1 \times 1 \times 0,809^{15} + 15 \times 0,191 \times 0,809^{14}$$

$\boxed{\simeq 0,1890}$ (à 10^{-4} près)

c) $E(X) = n \times p = 15 \times 0{,}191 = \boxed{2{,}865}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$

Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}191)$

On veut $P(X \geqslant 1)$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} \geqslant 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \times 1 \times 0{,}809^n \geqslant 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 0{,}809^n \leqslant 0{,}01$$

Par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}809^n\right) \leqslant \ln 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0{,}809 \leqslant \ln 0{,}01$$

car $\ln 0{,}809 < 0$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}809}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}809} \simeq 21{,}7$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc l'échantillon doit contenir $\boxed{\text{au moins 22 salariés.}}$

Ex2 :

1) a) ABCDEFGH est un cube donc la face ADHE est un carré.
Les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement en leur milieu,
donc $\boxed{(AH) \text{ et } (ED) \text{ sont perpendiculaires.}}$

Rem : Pour éviter toute confusion, on évite d'écrire ici $(AH) \perp (ED)$

b) Dans le carré EFGH, (GH) est perpendiculaire à (EH)
Dans le carré CDHG, (GH) est perpendiculaire à (HD)
Comme (HD) et (EH) sont deux droites sécantes (non confondues) du plan (EDH),
d'après le théorème de la porte, $\boxed{(GH) \perp (EDH)}$

c) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{cases} (GH) \perp (EDH) \\ (ED) \subset (EDH) \end{cases} \Rightarrow (GH) \text{ est perpendiculaire à } (ED)$$

De plus, d'après la question 1.a, on a : (AH) est perpendiculaire à (ED)
Comme (AH) et (GH) sont sécantes (en H) non confondues, elles définissent le plan (AGH). Le théorème de la porte nous permet de conclure que $\boxed{(ED) \perp (AGH)}$

Rem : Une résolution analytique (avec les coordonnées) de ces 3 questions était possible mais très malvenue d'après la formulation de l'énoncé.

2) Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\vec{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}$

D'après la question 1.c, $(ED) \perp (AGH)$ donc $\vec{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (AGH).

Ainsi, (AGH) a une éq. cartésienne de la forme : $0 \times x + 1 \times y - 1 \times z + d = 0 \Leftrightarrow y - z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$

Puis $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in (AGH)$ donc $y_A - z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

D'où (AGH) : $\boxed{y - z = 0}$

Rem : L'équation étant donnée dans l'énoncé, on pouvait aussi vérifier que les 3 pts A ; G et H vérifient l'équation avec leurs coordonnées.

3) ⓐ Dans le R.O.N., on a $L\begin{pmatrix}2/3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}2/3\\1\\-1\end{pmatrix}$ dirige (EL), et $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in (EL)$

D'où la représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

ⓑ $(EL) \cap (AGH)$: $\begin{cases} y - z = 0 \\ x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \iff \begin{cases} t - 1 + t = 0 \\ x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $\boxed{(EL) \cap (AGH) = \left\{\begin{pmatrix}1/3\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\}}$

ⓒ On a $L\begin{pmatrix}2/3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}2/3\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{LK} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{ED} \Rightarrow \overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires

Puis comme $\overrightarrow{ED}$ est normal à (AGH), $\overrightarrow{LK}$ l'est aussi.

Enfin, comme $y_K - z_K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, $K \in (AGH)$

On en conclut donc que $\boxed{K\begin{pmatrix}2/3\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \text{ est le projeté orthogonal de } L \text{ sur } (AGH)}$

ⓓ D'après la question précédente, on a :

$d(L\,;(AGH)) = LK = \|\overrightarrow{LK}\| = \sqrt{\overrightarrow{LK}^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

ⓔ Comme $(LK) \perp (AGH)$, (LK) est la hauteur du tétraèdre $LAGH$ relative à la base AGH, triangle rectangle en H

La diagonale d'un carré de côté "a" a pour longueur $a\sqrt{2}$, donc $AH = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Puis $\mathcal{A}_{AGH} = \frac{1}{2} AH \times HG = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (u.a.)

Enfin, $V_{LAGH} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{AGH} \times LK = \frac{1}{3} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{1}{6}}$ (u.v.)

Ex 3 :

$\boxed{1)\ B}$

La fct polynôme $g : x \mapsto x^{1000} + x$ est infiniment dérivable sur son ensemble de déf. $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1000 \times x^{999} + 1$ et $g''(x) = 1000 \times 999 \times x^{998}$

Comme 998 est pair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{998} \geqslant 0 \Rightarrow g''(x) \geqslant 0 \Rightarrow g$ convexe sur $\mathbb{R}$

$\boxed{2)\ A}$

On lit sur le graphique que $f'(0) = 1$

Donc au point d'abscisse 0, le coeff. dir. de la tangente T à $\mathcal{C}$ vaut $f'(0) = 1$

Ainsi, T est parallèle à la 1ère bissectrice d'éq. $y = x$

$\boxed{3)\ C}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{-1}{n+1} \geqslant -1$

Par transitivité, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant u_n \leqslant 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 1$, i.e. (u_n) est bornée.

$\boxed{4)\ C}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \times v_{n+1} < 0$, v_n change de signe à chaque pas, i.e. que deux termes consécutifs quelconques sont de signes opposés. Ceci élimine les réponses A et B car le signe n'est pas constant $(v_0 = k \in \mathbb{R}^*)$.

Par ailleurs, si v_n et v_{n+1} sont de signes opposés, v_{n+1} et v_{n+2} le sont aussi, et donc v_n et v_{n+2} sont de même signe. Ainsi, tous les termes d'indice pair ont le même signe (celui de v_0, i.e celui de k), opposé à celui de tous les termes d'indice impair.

$\boxed{5)\ B}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n - 4 \iff 2w_n = w_{n+1} + 4 \iff w_n = \frac{1}{2}(w_{n+1} + 4)$

D'où $w_1 = \frac{1}{2}(w_2 + 4) = \frac{1}{2}(8+4) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

Puis $w_0 = \frac{1}{2}(w_1 + 4) = \frac{1}{2}(6+4) = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$\boxed{6)\ B}$

Tout d'abord, $a_1 = \frac{e^0}{e^0+1} \cdot a_0 = \frac{1}{1+1} \times 1 = \frac{1}{2} \neq a_0$ qui élimine la réponse D

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \frac{e^n}{e^n+1} a_n - a_n = \left(\frac{e^n}{e^n+1} - 1\right) a_n = \frac{-1}{e^n+1} \cdot a_n$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ e^n > 0 \Rightarrow \frac{-1}{e^n+1} < 0$ donc $a_{n+1} - a_n$ est du signe opposé à a_n

On peut démontrer aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$ $\mathcal{P}(n)$

Ebauche de démonstration

Ini : $a_0 = 1 > 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Héré : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^n}{e^n+1} > 0$ et d'après HR : $a_n > 0$ donc par produit, $a_{n+1} > 0$ $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow (a_n)$ strictement décroissante.

Rem 1 : Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$, on pouvait étudier $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^n}{e^n+1} < 1$

Rem 2 : En cas de panique, on pouvait conjecturer avec la calculatrice (cas du QCM)

$\boxed{7)\ C}$

On modélise la situation par la suite géométrique (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$

On veut $u_n \simeq 4000 \iff 2^n \simeq 4000 \iff \ln(2^n) \simeq \ln 4000 \iff n \ln 2 \simeq \ln 4000$

$\iff n \simeq \frac{\ln 4000}{\ln 2} \simeq 12$

Il faut ainsi 12 étapes pour arriver au résultat, représentant $4\text{ h} = 4 \times 60\text{ min} = 240\text{ min}$

D'où chaque étape dure $\frac{240}{12} = 20$ minutes (environ)

Ex4 :

$\Rightarrow$ Partie A : $\quad \forall x \in]0;1]$, $f(x) = e^{-x} + \ln x$

1) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\Rightarrow$ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

2) On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $]0;1]$

$\forall x \in]0;1]$, $f'(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x.e^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x} = \boxed{\dfrac{1 - x.e^{-x}}{x}}$

3) On a : $x \in]0;1] \Rightarrow 0 < x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -x < 0$

$\Rightarrow e^{-1} \leqslant e^{-x} < e^0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 < e^{-1} \leqslant e^{-x} < 1$

$\Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$

Comme on a par ailleurs $0 < x \leqslant 1$, on peut multiplier membre à membre les deux égalités car toutes les valeurs sont <u>positives</u>.

D'où $\begin{cases} 0 < e^{-x} < 1 \\ 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x.e^{-x} < 1 \Rightarrow \boxed{x.e^{-x} < 1}$

Puis comme $x > 0$, f' est du signe de $1 - xe^{-x}$ sur $]0;1]$

et $\forall x \in]0;1]$, $x.e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 1 - x.e^{-x} > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strict. croissante sur }]0;1]}$

x	0	1
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	e^{-1}

$f(1) = e^{-1} + \ln 1 = e^{-1} + 0 = e^{-1}$
$= \dfrac{1}{e}$

4) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;1]$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = e^{-1} > 0$

donc $0 \in]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) ; f(1)]$ i.e. $0 \in f(]0;1])$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \ell \in]0;1]}$

$\Rightarrow$ Partie B : Soient (a_n) et (b_n) (suites imbriquées) : $\begin{cases} a_0 = 0,1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$

1) ⓐ $\begin{cases} a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0,37 & (\text{à } 10^{-2} \text{ près}) \\ b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1} \simeq 0,90 & (\text{à } 10^{-2} \text{ près}) \end{cases}$

ⓑ

```
from math import exp

def termes(n):
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n):
        c=exp(-b)
        b=exp(-a)
        a=c
    return(a,b)
```

Attention, pour être vraiment complet, ce script doit être précédé de l'importation du module « *math* », sinon la commande « *exp* » n'est pas reconnue.

Le fait que les suites (a_n) et (b_n) soient imbriquées nécessite de prendre des précautions dans l'écriture du script. Ici, le choix d'utiliser une troisième variable « *c* » permet de ne pas changer la variable « *a* » trop tôt, ce qui fausserait le calcul de la variable « *b* » immédiatement après.
Afin d'éviter l'introduction d'une variable intermédiaire « *c* », si l'énoncé nous avait laissé plus de liberté, on aurait pu écrire l'instruction à l'intérieur de la boucle « *for* » sous la forme d'un couple :

```
def termes2(n):
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n):
        a,b = exp(-b) , exp(-a)
    return(a,b)
```

On retrouve bien dans la console les termes a_1 et b_1 calculés à la question précédente, peu importe le script utilisé :

```
>>> termes(1)
(0.36787944117144233, 0.9048374180359595)
>>> termes2(1)
(0.36787944117144233, 0.9048374180359595)
```

2) ⓐ Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$ $\mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 0,1$; $a_1 = e^{-1}$; $b_1 = e^{-0,1}$ et $b_0 = 1$

D'après les approximations de la question B1.a, on a bien $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$
$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} < 1$

Par HR, on a : $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$

$\Rightarrow e^{-0} > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$ par décroissance de e^{-x} sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 1 > b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq e^{-1}$

$\Rightarrow 0 < e^{-1} \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} < 1 \leq 1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie par transitivité

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1}$

ⓑ On utilise le théorème de la convergence monotone à partir des informations que l'on extrait de la propriété démontrée précédemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_n) \text{ est croissante} \\ (a_n) \text{ est majorée par } 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a_n) \text{ converge vers une limite réelle } A \leq 1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} b_{n+1} \leq b_n \\ b_n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b_n) \text{ est décroissante} \\ (b_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(b_n) \text{ converge vers une limite réelle } B \geq 0}$$

3) a) On admet que $\begin{cases} A \in]0;1] \\ B \in]0;1] \end{cases}$ et $\begin{cases} A = e^{-B} \\ B = e^{-A} \end{cases}$

On a $A = e^{-B} \iff -B = \ln A \iff B = -\ln A$

Par ailleurs, l'énoncé donne $B = e^{-A}$

D'où $e^{-A} = -\ln A \iff e^{-A} + \ln A = 0 \iff \boxed{f(A) = 0}$

b) Nous obtenons de la même manière :

$B = e^{-A} \iff -A = \ln B \iff A = -\ln B$

Or d'après l'énoncé, $A = e^{-B}$

D'où $e^{-B} = -\ln B \iff e^{-B} + \ln B = 0 \iff f(B) = 0$

Finalement, A et B sont solutions de l'équation $f(x) = 0$

De plus, l'énoncé stipule que $A \in]0;1]$ et $B \in]0;1]$

Or d'après la question A.4, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;1]$

Ainsi, on a $A = B \iff \boxed{A - B = 0}$

<u>Rem :</u>

On a : $\begin{cases} (a_n) \text{ croissante} \\ (b_n) \text{ décroissante} \\ \lim (a_n - b_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes