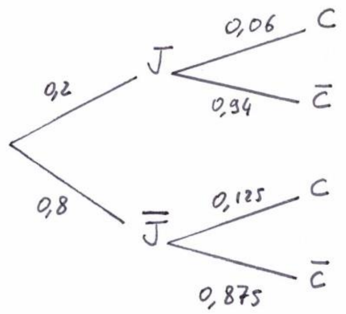
Ex 1 :

⇒ Partie A

1)



2) $P(J \cap C) = P(J) \times P_J(C) = 0{,}2 \times 0{,}06 = \boxed{0{,}012}$

3) $\{J ; \overline{J}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(J \cap C) + P(\overline{J} \cap C) \\
&= 0{,}012 + P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(C) \\
&= 0{,}012 + 0{,}8 \times 0{,}125 \\
&= 0{,}012 + 0{,}1 \\
&= \boxed{0{,}112}
\end{aligned}
$$

4) $P_C(\overline{J}) = \dfrac{P(\overline{J} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}112} = \dfrac{100}{112} = \dfrac{25}{28} \boxed{\simeq 0{,}893}$ (à 10^{-3} près)

5) Notons p_1 la probabilité recherchée. On a : $p_1 = P_C(J)$

$p_1 = \dfrac{\text{Card}(J \cap C)}{\text{Card}(C)} = \dfrac{P(J \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}012}{0{,}112} = \dfrac{12}{112} = \dfrac{3}{28} \simeq 0{,}107$

OU plus simplement : $p_1 = P_C(J) = 1 - P_C(\overline{J}) = 1 - \dfrac{25}{28} = \dfrac{3}{28} \simeq 0{,}107$

On a $\boxed{p_1 < 15\% \text{ donc l'affirmation est vraie.}}$

$\Rightarrow$ Partie B

1) $\boxed{X \sim \mathcal{B}(30\,;\,0{,}112)}$ car on répète $n = 30$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à $p = 0{,}112$.

2) $$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \binom{30}{0} \times p^0 \times (1-p)^{30-0} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times (1-0{,}112)^{30} \\ &= 1 - 0{,}888^{30} \\ &\boxed{\simeq 0{,}972} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} P(X \leqslant 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= 0{,}888^{30} + \binom{30}{1} \times p^1 \times (1-p)^{30-1} \\ &= 0{,}888^{30} + 30 \times 0{,}112 \times 0{,}888^{29} \\ &\boxed{\simeq 0{,}136} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)} \end{aligned}$$

(OU) Directement en utilisant la fonction de répartition de la calculatrice

$\boxed{P(X \leqslant 1) \simeq 0{,}136}$ (à 10^{-3} près)

4) $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}112 = \boxed{3{,}36}$

Ex 2 :

$\boxed{1)\ C}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1-0{,}15)\,u_n \iff u_{n+1} = 0{,}85\,u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $u_0 = 1$ (L)

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0{,}85^n$

On veut $u_n < 0{,}25 \iff 0{,}85^n < 0{,}25$

$\iff \ln(0{,}85^n) < \ln 0{,}25$) Par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n \ln 0{,}85 < \ln 0{,}25$

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85}$) car $\ln 0{,}85 < 0$

Or $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85} \simeq 8{,}5$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc il faut attendre 9 h $\Rightarrow$ réponse C

$\boxed{2)\ D}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$ et $u_0 = 6$

L'étude de $u_{n+1} - u_n$ et de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas éclairant ici.

En calculant les premiers termes, on voit que : $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$

$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$

$\vdots$

] A visualiser aussi sur la calculatrice

On peut démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6$ pour s'en convaincre.

$\boxed{3)\ B}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(2x) = 4\ln(3\times 2x) = 4\ln(2\times 3x) = 4(\ln(2) + \ln(3x))$$
$$= (4\ln 2) + 4\ln(3x)$$
$$= \ln(2^4) + f(x)$$
$$= \ln(16) + f(x)$$

$\boxed{4)\ c}$

En $+\infty$, il s'agit d'une FI "$\frac{\infty}{\infty}$" qu'on lève en écrivant que $\forall x \in]1;+\infty[$,

$g(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1}$ ou $g(x) = \frac{\ln x}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (th. des croissances comparées)

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$

Enfin, par produit, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+ \times 1 = 0^+$

Donc $\boxed{\text{l'axe des abscisses d'eq } x=0 \text{ est asymptote horizontale}}$ à C_f au voisinage de $+\infty$

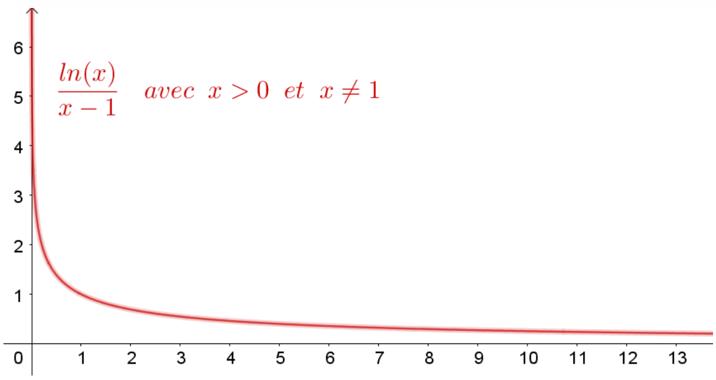
La limite en 1^+ est une F.I. du type "$\frac{0}{0}$" plus astucieuse à lever.

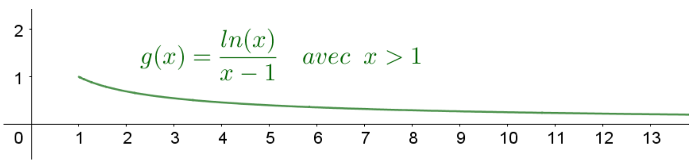
$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Il s'agissait de la limite du taux de variations, donc du nombre dérivé.

Comme la limite est finie en un point fini, $\boxed{\text{il n'y a pas d'asymptote en } 1.}$

⚠ Sur la calculatrice, le graphe est tracé sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et laisse penser qu'il y a aussi une asymptote verticale, en 0, qui n'appartient pas au domaine d'étude $]1;+\infty[$ de g.





$\boxed{5)\ B}$

$\forall x \in]0;2]$, $h(x) = x^2(1+2\ln x)$ et $h'(x) = 4x(1+\ln x)$

$h(x) = 0 \iff x^2(1+2\ln x) = 0$

$\iff x^2 = 0$ ou $1+2\ln x = 0$

$\iff x = 0$ ou $\ln x = -\frac{1}{2}$

$\iff x = 0$ ou $x = e^{-\frac{1}{2}}$

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\iff x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ car $0 \notin]0;2]$

Par ailleurs, $\frac{1}{\sqrt{e}} \in \left[\frac{1}{e};2\right]$ donc h s'annule 1 fois sur $\left[\frac{1}{e};2\right]$

$\boxed{6)\ D}$

La tangente à $\mathcal{C}_h$ en $\sqrt{e}$ a pour équation : $y = h'(\sqrt{e}) \times (x-\sqrt{e}) + h(\sqrt{e})$

On a : $h'(\sqrt{e}) = 4\sqrt{e}(1+\ln\sqrt{e}) = 4\sqrt{e}\left(1+\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right) = 4\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\times\ln e\right)$

$= 4\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{e} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 6\sqrt{e}$

et $h(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2 \times (1+2\ln\sqrt{e}) = e \times \left(1+2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right) = e\left(1+2\times\frac{1}{2}\ln e\right)$

$= e(1+1) = 2e$

Puis la tangente : $y = h'(\sqrt{e}) \times (x-\sqrt{e}) + h(\sqrt{e})$

$\iff y = 6\sqrt{e} \times (x-\sqrt{e}) + 2e$

$\iff y = 6\sqrt{e}.x - 6e + 2e$

$\iff y = 6\sqrt{e}.x - 4e$

$\iff y = 6e^{\frac{1}{2}}.x - 4e$

$\boxed{7)\ B}$

h est 2 fois dérivable sur $]0;2]$ d'après l'énoncé et $\forall x \in]0;2]$, $h'(x) = 4x(1+\ln x)$

D'où $\forall x \in]0;2]$, $h''(x) = 4(1+\ln x) + 4\cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} = 4(2+\ln x)$

Puis $h''(x) \geqslant 0 \iff 4(2+\ln x) \geqslant 0$

$\iff 2+\ln x \geqslant 0$

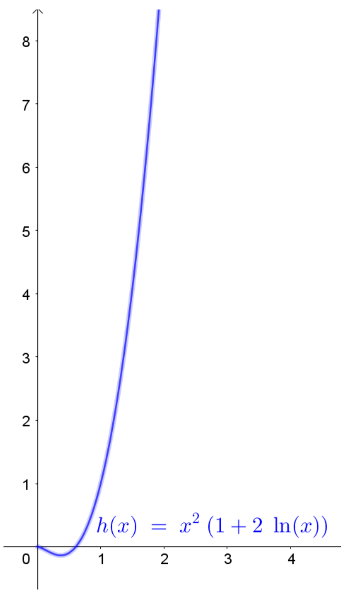
$\iff \ln x \geqslant -2$

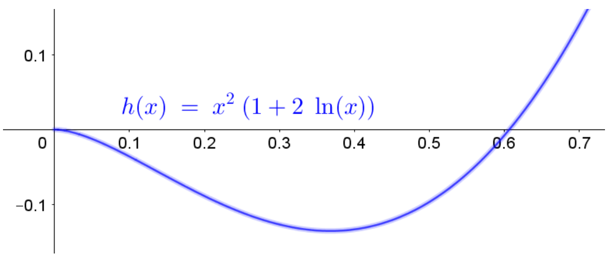
$\iff x \geqslant e^{-2}$ et $e^{-2} \in]0;2]$

x	0		e^{-2}		2
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
h		concave		convexe	

inflexion

⚠ Sur la calculatrice, avec un zoom inadapté, le graphe pouvait laisser penser qu'il n'y avait pas de point d'inflexion.





Ex 3 :

=> Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}$

1) ⓐ On a d'une part $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x = -\infty$

et d'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} 0,5x - 2 = -\infty \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{0,5x-2} = 0^+$

Puis par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $1 + 0,5x\left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right) = 1 + x - e^{0,5x} \times e^{-2} \times \frac{\cancel{0,5x}}{\cancel{0,5x}}$

$= 1 + x - e^{0,5x-2}$

$= \boxed{f(x)}$

Pour la limite en $+\infty$:

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 0,5x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad \left(\text{th. croissances comparées}\right) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{0,5x}}{0,5x} = +\infty$

Par opérations sur les limites, on a ensuite :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} = -\infty$ car $e^{-2} > 0$

Puis par produit, on obtient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0,5x\left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2}\right) = -\infty$

Enfin, par somme, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) ⓐ On admet dans l'énoncé que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 0 + 1 - 0,5 \times e^{0,5x-2} = \boxed{1 - 0,5.e^{0,5x-2}}$

ⓑ $f'(x) < 0 \iff 1 - 0,5\,e^{0,5x-2} < 0$

$\iff 0,5\,e^{0,5x-2} > 1$

$\iff e^{0,5x-2} > 2$

$\iff 0,5x - 2 > \ln 2$ } par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff 0,5x > 2 + \ln 2$

$\iff x > 4 + 2\ln 2$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left]4 + 2\ln 2 \, ; \, +\infty\right[}$

3)

x	$-\infty$		$4+2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$f(4+2\ln 2) = 1 + 4 + 2\ln 2 - e^{0,5(4+2\ln 2)-2} = 5 + 2\ln 2 - e^{\cancel{2}+\ln(2)-\cancel{2}} = 5 + 2\ln(2) - 2$
$= \boxed{3 + 2\ln 2}$

4) On a $4 + 2\ln 2 \simeq 5,4$ donc $[-1;0] \subset \left]-\infty \, ; \, 4+2\ln 2\right]$

La fct f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement</u> <u>croissante</u> sur $[-1;0] \subset \left]-\infty ; 4+2\ln 2\right]$

De plus, $f(-1) = -e^{-2,5} < 0$ et $f(0) = 1 - e^{-2} \simeq 0,86 > 0$

On a $0 \in \left[f(-1) \, ; \, f(0)\right]$ donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } [-1;0]}$

=> Partie B : Soit (u_n) : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1 - e^{-2} \simeq 0{,}86$

On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$ => $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ et mq $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

D'après la partie A, f est strictement croissante sur $]-\infty ; 4 + 2\ln 2]$,

donc aussi sur $]-\infty ; 4] \subset]-\infty ; 4 + 2\ln 2]$

On a donc : $\underbrace{u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}_{HR} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(4)$

Or $f(4) = 1 + 4 - e^{0{,}5\times 4 - 2} = 5 - e^0 = 4$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \leqslant u_{n+1} \\ u_n \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est majorée (par 4)} \end{cases}$

D'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 4$.

2) a) $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1 + \ell - e^{0{,}5\ell - 2} \Leftrightarrow e^{0{,}5\ell - 2} = 1 \Leftrightarrow e^{0{,}5\ell - 2} = e^0$

$\Leftrightarrow 0{,}5\ell - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5\ell = 2 \Leftrightarrow \boxed{\ell = 4}$

On a donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 4}$

(b) La fonction "valeur" renvoie le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > a$, avec "a" saisi en argument.

Ainsi, $\boxed{u_{12} \text{ est le premier terme supérieur à } 3{,}99}$

Ex 4 :

1) (a) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$

R milieu de $[AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_R = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ z_R = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{-1+(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-5\\4-0\\-1-(-1)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}}$

(b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ donc tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, comme $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, est aussi normal à $\mathcal{P}_1$. D'où $\mathcal{P}_1$ a une équation cartésienne de la forme :

$x - y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

Puis $R\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow x_R - y_R + d = 0 \Leftrightarrow 3 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

D'où $\mathcal{P}_1$: $\boxed{x - y - 1 = 0}$

Rem : On pouvait aussi écrire que :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RM} = 0 \Leftrightarrow -4(x-3) + 4(y-2) + 0(z+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x + 12 + 4y - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x + 4y + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x - y - 1 = 0}$$

(c) $x_E - y_E - 1 = 10 - 9 - 1 = 0$ donc $\boxed{E\begin{pmatrix}10\\9\\8\end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1}$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5\\9\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}9\\5\\9\end{pmatrix}$, puis

$$\begin{cases} EA = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{\overrightarrow{AE}^2} = \sqrt{5^2+9^2+9^2} = \sqrt{25+81+81} = \sqrt{187} \\ EB = \|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{\overrightarrow{BE}^2} = \sqrt{9^2+5^2+9^2} = \sqrt{81+25+81} = \sqrt{187} \end{cases} \Rightarrow \boxed{EA = EB}$$

Rem : Ceci signifie que $\mathcal{P}_1$ est le plan médiateur de $[AB]$ car $(AB) \perp \mathcal{P}_1$

2) ⓐ $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x - z - 2 = 0$ donc $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$

Par ailleurs, on a vu que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ (on peut aussi prendre $\vec{AB}$)

La position des "0" dans les coordonnées de $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ indique clairement que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont ni confondus, ni strictement parallèles.

$\boxed{\text{Ils sont donc sécants}}$ et leur intersection est une droite.

ⓑ On note $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$ (accolades inutiles car Δ est un ensemble)

Deux solutions s'offrent à nous pour répondre à cette question :

→ On vérifie que $\Delta \subset \mathcal{P}_1$ et $\Delta \subset \mathcal{P}_2$ (⚠ Ne pas écrire $\in$ car Δ est un ensemble)

$$\begin{cases} \text{D'une part, } x - y - 1 = 2+t-(1+t)-1 = 2+t-1-t-1 = 0 \text{ donc } \Delta \subset \mathcal{P}_1 \\ \text{D'autre part, } x - z - 2 = 2+t-t-2 = 0 \text{ donc } \Delta \subset \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

Donc on a bien : $\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

→ La seconde solution, plus difficile, consiste à résoudre le système $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = 2 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = x - 1 = 2 + z - 1 = 1 + z \end{cases}$$

En prenant $z = t$ comme paramètre, on obtient finalement :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

qui est la représentation paramétrique de Δ donnée dans l'énoncé.

⚠ Si on ne prenait pas z comme paramètre, on obtenait une représentation paramétrique différente (et juste...) qui ne permettait pas de conclure.

3) Soit $\mathcal{P}_3$ d'éq : $y + z - 3 = 0$, étudions $\mathcal{P}_3 \cap \Delta$:

$$\mathcal{P}_3 \cap \Delta \iff \begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} 1+t+t-3 = 0 \\ x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 2 \\ x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 \\ x = 2+t = 2+1 = 3 \\ y = 1+t = 1+1 = 2 \\ z = t = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\mathcal{P}_3 \cap \Delta = \left\{ \Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

4) ⓐ En utilisant les plans médiateurs (ce que sous-entendait l'énoncé)

On a $\begin{cases} \Omega \in \mathcal{P}_3 \cap \Delta \\ \Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega \in \mathcal{P}_1 & \text{plan médiateur de } [AB] \\ \Omega \in \mathcal{P}_2 & \text{plan médiateur de } [AC] \\ \Omega \in \mathcal{P}_3 & \text{plan médiateur de } [AD] \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D}$

OU sans utiliser les plans médiateurs, on a :

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

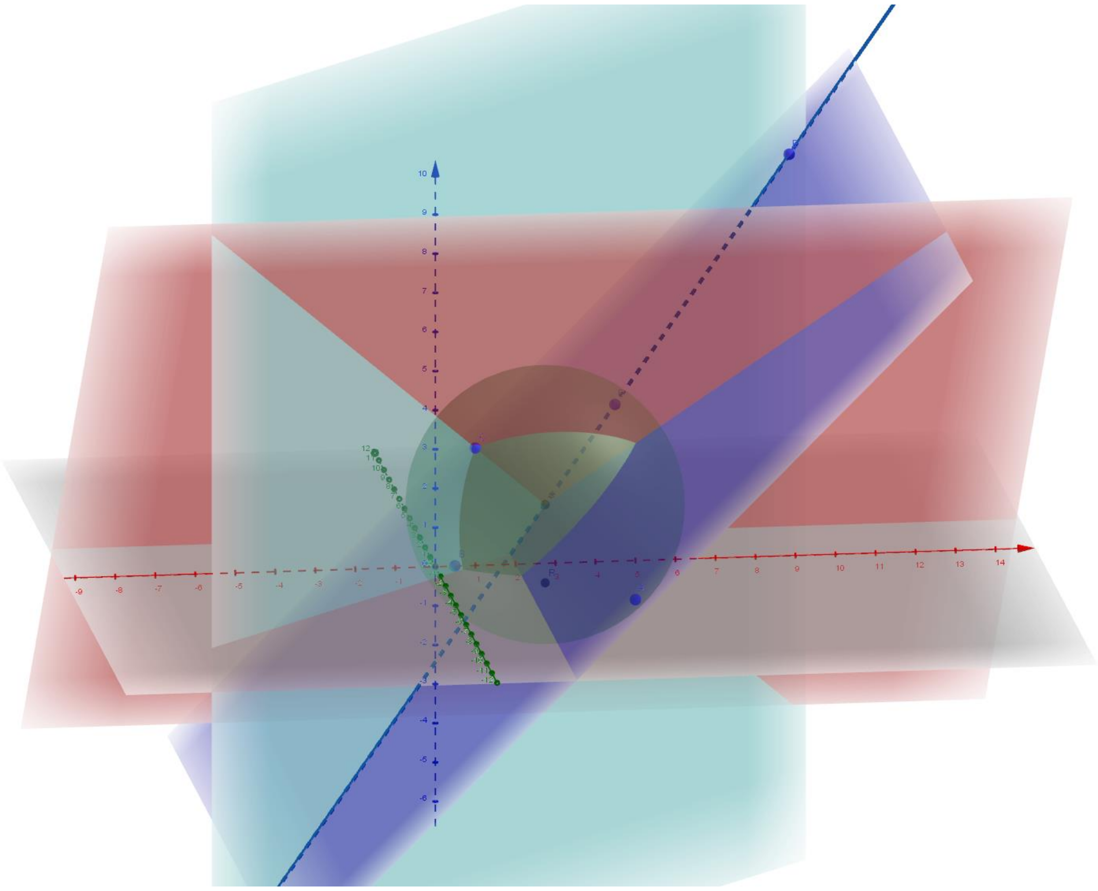
Puis en calculant séparément, on observe que $\boxed{\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D} = 2\sqrt{3}$

ⓑ Comme $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$, Ω est le centre de la sphère S de rayon $\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{\overrightarrow{\Omega A}^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$

On a donc $\boxed{A ; B ; C \text{ et } D \text{ sur la sphère } S \text{ de centre } \Omega\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et de rayon } 2\sqrt{3}}$

Rem : S a pour équation : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \Omega A^2$

$\iff (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 12$



➔ Voir le fichier Geogebra en pièce jointe pour visualiser en 3D