Ex 1 :

$\boxed{1)\ C}$

Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = (1-x)\,e^{-x}$

$\boxed{2)\ D}$

On a $\begin{cases} f'' \geqslant 0 \text{ sur } [-3;-1] \\ f'' \leqslant 0 \text{ sur } [-1;1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ convexe sur } [-3;-1] \\ f \text{ concave sur } [-1;1] \end{cases} \Rightarrow$ ceci exclut les réponses A et B

Puis f'' change de signe sur $[-2;0]$ donc f' n'est pas monotone sur $[-2;0]$, ce qui exclut la réponse C.

Enfin, f'' s'annule et change de signe (+ vers −) donc f' admet un maximum en −1.

$\boxed{3)\ C}$

Il suffit de dériver chacune des propositions pour retrouver celle qui correspond à f.

$F_a'(x) = -\frac{1}{6}\left(3x^2 e^{-x^2} + (x^3+1) \times (-2x) e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{6} \times e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4 - 2x) \neq f(x)$

$F_b'(x) = -\frac{1}{4}\left(4x^3 e^{-x^2} + x^4 \times (-2x) \times e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{4} e^{-x^2}(4x^3 - 2x^5) \neq f(x)$

$F_c'(x) = -\frac{1}{2}\left(2x e^{-x^2} + (x^2+1) \times (-2x) e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}(\cancel{2x} - 2x^3 - \cancel{2x}) = \cancel{-\frac{1}{2}} \times (-\cancel{2}x^3) e^{-x^2} = x^3 e^{-x^2} = f(x)$

$\boxed{4)\ B}$

Il s'agit d'une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$

On $\forall x > 0,\ \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\cancel{e^x}(1+\frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(1-\frac{1}{e^x})} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$

Donc par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$

$\boxed{5)\ C}$

Seule la proposition C est une primitive de f

On vérifie tout de même que : $\frac{1}{2}e^{2\times 0+1} - \frac{1}{2}e + 1 = \cancel{\frac{1}{2}e} - \cancel{\frac{1}{2}e} + 1 = 1$

$\boxed{6)\ A}$

D'après la courbe, $\begin{cases} f \text{ convexe sur } [1;4] \\ f \text{ concave sur } [-2;1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'' \geqslant 0 \text{ sur } [1;4] \\ f'' \leqslant 0 \text{ sur } [-2;1] \end{cases}$

Seule la proposition A correspond

Ex2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x . \ln x + 1$

1) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} x . \ln x = 0$ (th. croissances comparées)

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x . \ln x = +\infty$

Enfin par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} + 0 = \boxed{1 + \ln x}$

b) $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 + \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	$+\infty$

$f(e^{-1}) = e^{-1} \times \ln(e^{-1}) + 1$
$= e^{-1} \times (-1) \times \ln e + 1$
$= e^{-1} \times (-1) + 1$
$= 1 - e^{-1}$
$= 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$ car $e > 1$

c) On a $0 < e^{-1} < 1$

Procédons par disjonction de cas

* Sur $]0 ; e^{-1}]$, f est strictement décroissante

Donc $f(x) \in [f(e^{-1}) ; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)[\iff \frac{e-1}{e} \leq f(x) < 1 \underset{\text{car } \frac{e-1}{e} > 0}{\Rightarrow} 0 < f(x) < 1$ ⚠

* Sur $]e^{-1} ; 1[$, f est strictement croissante

Donc $f(x) \in]f(e^{-1}) ; f(1)[\iff \frac{e-1}{e} < f(x) < (1 \times \ln 1) + 1 \iff \frac{e-1}{e} < f(x) < 1$
$\Rightarrow 0 < f(x) < 1$ ⚠

* Conclusion : Par disjonction (exhaustive) de cas,
nous venons de montrer que : $\boxed{\forall x \in]0;1[, \ f(x) \in]0;1[}$ ← $]0;1[$ est stable par f

3) a) On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$

Puis (T) a pour équation : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = 1 \times (x-1) + 1$

$\Leftrightarrow \boxed{y = x}$ La 1ère bissectrice est tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1

b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme d'une fct de référence et d'une fct constante toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} > 0$ Donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$

c) Une fonction convexe possède un graphe situé au-dessus de toutes ses tangentes.

En particulier, $\mathcal{C}_f$ est situé au-dessus de (T) sur $\mathbb{R}_+^*$

Ceci se traduit par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geqslant x}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$ $\mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 \in]0;1[$ $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 1$ et mq. $0 < u_{n+1} < 1$

On a $\underset{\text{HR}}{0 < u_n < 1} \Rightarrow 0 < f(u_n) < 1$ d'après la question 2.c)

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1}$

b) D'après 3.c), $\forall x > 0$, $f(x) > x$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (d'après 4.a) donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

c) (u_n) est croissante (strictement) et majorée (par 1) donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite réelle $\ell \leq 1$

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

A; B; C; D sont coplanaires $\iff \exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda + 3\mu = -3 \\ 3\lambda + 0\mu = 6 \\ 3\lambda - 3\mu = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = -1 & \left(\frac{1}{3}L_1\right) \\ \lambda = 2 \\ \lambda - \mu = -1 & \left(\frac{1}{3}L_3\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = -1-\lambda = -1-2 = -3 \\ \lambda = 2 \\ \mu = 1+\lambda = 1+2 = 3 \end{cases}$$ incompatibles

Donc $\boxed{\text{les points A; B; C et D ne sont pas coplanaires}}$

2) a) Dans le R.O.N., $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times3 + 3\times0 + 3\times(-3) = 9+0-9 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A}}$

b) Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = -3\times3 + 6\times3 + (-3)\times3 = -9+18-9 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -3\times3 + 6\times0 + (-3)\times(-3) = -9+0+9 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, non colinéaires (ABC est un triangle rect.), directeurs du plan (ABC). Donc $\overrightarrow{AD}$ est normal à (ABC), d'où $\boxed{(AD)\perp(ABC)}$

c) Dans le R.O.N., on a :

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Puis, comme ABC est rectangle en A, on a :

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ u.a.

Enfin, (AD) est la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC car $(AD) \perp (ABC)$

D'où $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \times AD = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times \cancel{3}\sqrt{6} = \frac{9 \times \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = \boxed{27 \text{ u.v.}}$

3) ⓐ Soit $H\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD} \iff \begin{cases} -1 = 0 \times \alpha - 6\beta \\ -1 = -3\alpha + 3\beta \\ -4 = -6\alpha - 6\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ \alpha = \frac{1}{3}(1+3\beta) = \frac{1}{3}(1+3\times\frac{1}{6}) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{6}(4-6\beta) = \frac{1}{6}(4-6\times\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}\times 3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ compatibles

D'où $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$, i.e. $\boxed{(\alpha;\beta) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)}$

ⓑ D'après la question précédente, $H \in (BCD)$ car $\overrightarrow{BH}$ est combi. linéaire de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$

Puis avec $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, on obtient dans le R.O.N. :

$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times 0 + 2\times(-3) + (-1)\times(-6) = 0 - 6 + 6 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD} = 2\times(-6) + 2\times 3 + (-1)\times(-6) = -12 + 6 + 6 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$

On a ainsi $\overrightarrow{AH}$ normal à (BCD), i.e $(AH) \perp (BCD)$

D'où $\boxed{\text{H est le projeté orthogonal de A sur (BCD)}}$

ⓒ D'après la question précédente, on déduit que :

$d(A;(BCD)) = AH = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \boxed{3}$

4) (AH) est la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base BCD, d'où :

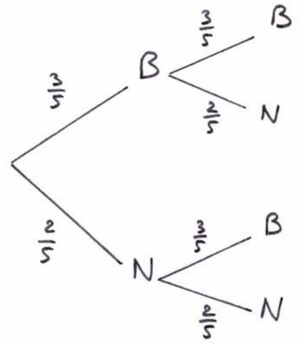
$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BCD} \times AH \iff \mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3\,V_{ABCD}}{AH} = \dfrac{\cancel{3}\times 27}{\cancel{3}} = \boxed{27 \text{ u.a.}}$

Ex 4 :

1) a) Notons les évènements :

B : " le jeton tiré est blanc "

N : " le jeton tiré est noir "



Il s'agit d'un tirage avec remise.

b) Nous cherchons la probabilité p d'obtenir 2 jetons blancs.

D'où $p = \left(P(B)\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = \boxed{0{,}36}$

2) a) A chaque tirage, on a : $\begin{cases} P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{N+3} \\[2ex] P(N) = \dfrac{\mathrm{Card}(N)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{N}{N+3} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} P(X=-9) = \left(P(B)\right)^2 = \left(\dfrac{3}{N+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(N+3)^2} \\[2ex] P(X=-1) = \left(P(N)\right)^2 = \left(\dfrac{N}{N+3}\right)^2 = \dfrac{N^2}{(N+3)^2} \\[2ex] P(X=5) = 1 - \left(P(X=-9) + P(X=-1)\right) = 1 - \dfrac{N^2+9}{(N+3)^2} = \dfrac{\cancel{N^2} + 6N \cancel{+9} \cancel{-N^2} \cancel{-9}}{(N+3)^2} = \dfrac{6N}{(N+3)^2} \end{cases}$

Finalement, la loi de probabilité de X :

x_k	-9	-1	5
$P(X=x_k)$	$\frac{9}{(N+3)^2}$	$\frac{N^2}{(N+3)^2}$	$\frac{6N}{(N+3)^2}$

(b) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2+30x-81>0$

Cherchons les racines du trinôme. On peut voir que $x_1=3$ est racine évidente

puis $x_1 . x_2 = \frac{-81}{-1} \iff 3x_2 = 81 \iff x_2 = 27$

(ou) $\Delta = 30^2 - 4\times(-1)\times(-81) = 900-324 = 576$

Puis $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-30+\sqrt{576}}{2\times(-1)} = \dfrac{-30+24}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-30-\sqrt{576}}{2\times(-1)} = \dfrac{-30-24}{-2} = \dfrac{-54}{-2} = 27 \end{cases}$

Enfin, comme le coefficient dominant (-1) est négatif, le trinôme est concave :

x	$-\infty$		3		27		$+\infty$
$-x^2+30x-81$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\boxed{\mathcal{S} =]3\,;27[}$

(c) On veut $E(X)>0 \iff \sum_k x_k . P(X=x_k) > 0$

$$\iff -9\times\frac{9}{(N+3)^2} + (-1)\times\frac{N^2}{(N+3)^2} + 5\times\frac{6N}{(N+3)^2} > 0$$

$$\iff \frac{-81+30N-N^2}{(N+3)^2} > 0$$

car $(N+3)^2>0$ avec $N\in\mathbb{N}$

$$\iff -N^2+30N-81 > 0$$

D'après la question précédente, comme $N\in\mathbb{N}$, on en déduit qu'il faut que $\boxed{N \in [\![4\,;26]\!]}$

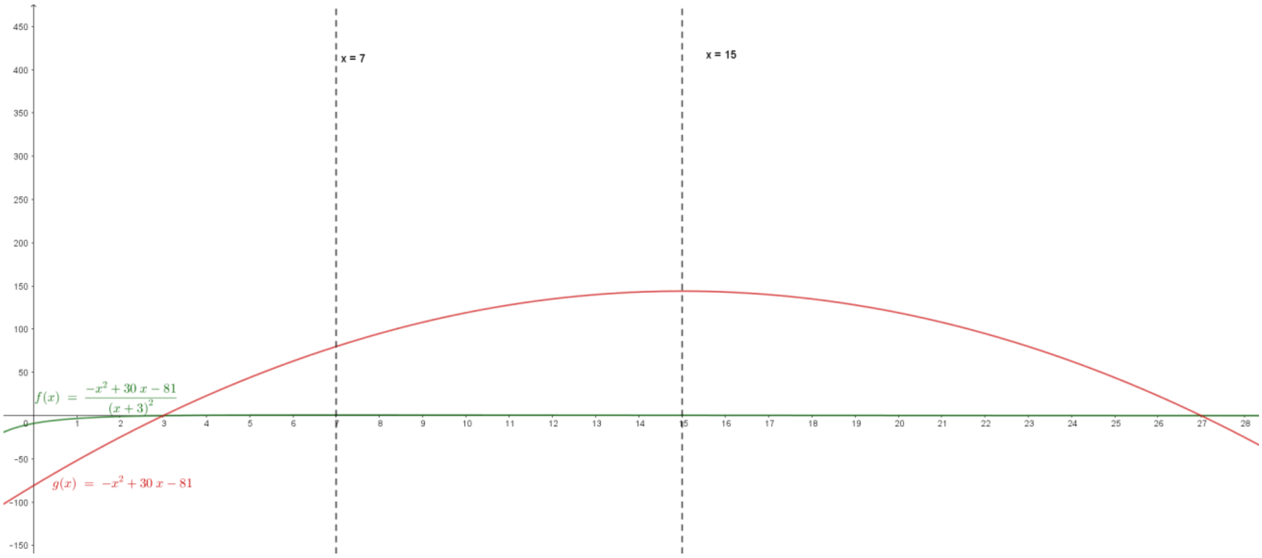
(d) On cherche à maximiser l'espérance $E(X)$.

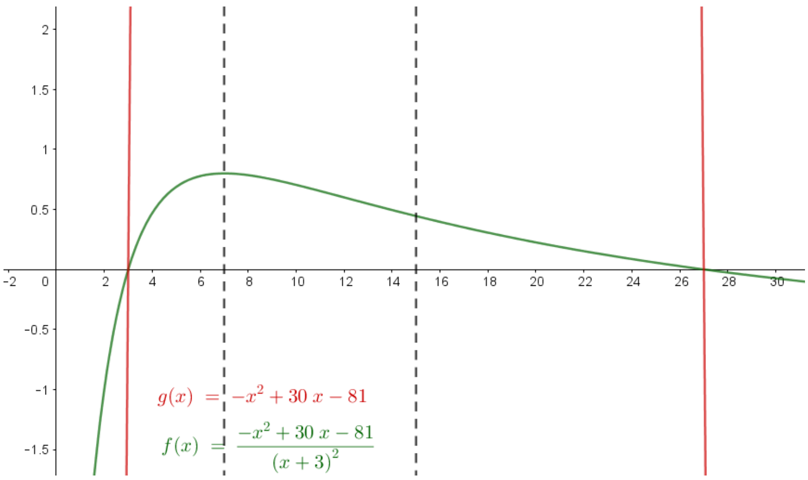
On cherche ainsi le maximum de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-x^2+30x-81}{(x+3)^2}$ sur $[4\,;26]$

⚠ Il serait faux de chercher le maximum de la fonction $x\longmapsto -x^2+30x-81$ qui ne correspond pas à l'espérance, mais est seulement une équivalence dans la résolution de l'inéquation $E(X)>0$

Pour illustrer cette dernière remarque, voici la représentation graphique des deux courbes avec des échelles différentes (les repères ne sont pas orthonormés).

Nous représentons en vert la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+30x-81}{(x+3)^2}$ qui est une forme continue de l'espérance $E(X)$. En rouge figure la fonction polynôme $g : x \mapsto -x^2+30x-81$





Nous pouvons voir assez clairement que ces fonctions s'annulent en même temps et ont le même signe sur l'intervalle représenté, ce qui justifie l'équivalence utilisée dans la question 2.c) :

$$f(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)>0$$

Par contre, il apparaît aussi très clairement que ces fonctions n'ont pas les mêmes variations et que leur maximum respectif n'est pas atteint pour la même valeur.

Il faut donc bien étudier les variations de f, et surtout pas celles de g.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition $[4;26]$ en tant que fonction rationnelle.

$$\forall x \in [4;26], \quad f'(x) = \frac{(-2x+30)(x+3)^2 - (-x^2+30x-81)\times 2\times 1\times(x+3)}{((x+3)^2)^2}$$

$$= \frac{(x+3)(x+3)(-2x+30) - (x+3)(-2x^2+60x-162)}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{(x+3)\left((\cancel{-2x^2}+24x+90)+(\cancel{2x^2}-60x+162)\right)}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x+3)}^{1}(-36x+252)}{(x+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{36(7-x)}{(x+3)^3}$$

$\forall x \in [4;26]$, $\quad x+3>0 \Rightarrow (x+3)^3>0 \Rightarrow \dfrac{36}{(x+3)^3}>0$

Donc f' est du signe de $7-x$: $\quad 7-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 7$

x	4		7		26
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le gain maximal est ainsi obtenu pour $\boxed{7 \text{ jetons noirs}}$

3) On a $N=7$ donc $P(X=5) = \dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{6\times 7}{(7+3)^2} = \dfrac{42}{10^2} = 0{,}42$

On répète 10 fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le joueur gagne 5€" est égale à $p = P(X=5) = 0{,}42$.

En appelant Y la variable aléatoire qui compte le nombre de joueurs ayant gagné 5€, on a : $Y \sim \mathcal{B}(10;0{,}42)$ ← loi Binomiale

D'où $P(Y\geqslant 1) = 1-P(Y=0) = 1-\binom{10}{0}\times 0{,}42^0\times(1-0{,}42)^{10-0} = 1-1\times 1\times 0{,}58^{10} = \boxed{1-0{,}58^{10}}$

Aucune information n'est donnée pour la valeur approchée : $\boxed{P(Y\geqslant 1)\simeq 0{,}996}$ (à 10^{-3} près)