Ex 1 :

$\boxed{1)\ C}$

$f(x) = 2022 \iff \ln(1+x^2) = 2022$

$\iff 1+x^2 = e^{2022}$

$\iff x^2 = e^{2022} - 1$ > 0 car $e^0 = 1$ et exp strict. croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff x = \sqrt{e^{2022}-1}$ ou $x = -\sqrt{e^{2022}-1}$ Donc 2 solutions distinctes.

$\boxed{2)\ C}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 2x = 1 - 2x + \ln x$

Puis g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = -2 + \frac{1}{x} = \frac{1-2x}{x}$ qui est du signe de $1-2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$1-2x \geq 0 \iff 2x \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g		convexe	inflexion	concave	

$\boxed{3)\ A}$

$\forall x \in]-1;1[$, $0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 < 1-x^2 \leq 1$

Ainsi, la fonction $u : x \mapsto 1-x^2$ est strictement positive sur $]-1;1[$

Comme f est continue (car dérivable) sur $]-1;1[$, elle admet des primitives sur cet ensemble.

$\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

D'où $F(x) = \frac{1}{2}\ln(u(x)) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

<u>Rem.</u> On pouvait également dériver les fcts proposées

$\boxed{4)\ A}$ $-x^2-x+6>0$ est la condition recherchée car ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Etude du trinôme : $x_1 = 2$ racine évidente

puis $x_1 . x_2 = \frac{6}{-1} \iff 2x_2 = -6 \iff x_2 = -3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi la fonction est définie sur $]-3\,;2[$

$\boxed{5)\ A}$

$\forall x \in]\frac{1}{2}\,;+\infty[,\ f(x) = x^2-4x+3\ \ln(2x-1)$

f est dérivable sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par composition $(2x-1>0$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[)$ puis par somme

$\forall x \in]\frac{1}{2}\,;+\infty[,\ f'(x) = 2x-4+3\times\frac{2}{2x-1} = 2x-4+\frac{6}{2x-1}$

On a : $\begin{cases} f(1) = 1^2-4\times1+3\times\ln(2\times1-1) = 1-4+3\times\ln 1 = -3+3\times0 = -3 \\ f'(1) = 2\times1-4+\frac{6}{2\times1-1} = 2-4+\frac{6}{1} = -2+6 = 4 \end{cases}$

Puis la tangente a pour équation : $y = f'(1)\times(x-1)+f(1) \iff y = 4(x-1)+(-3)$

$\iff y = 4x-7$

$\boxed{6)\ B}$

$\ln(x+3) < 2\ \ln(x+1) \iff \ln(x+3) < \ln((x+1)^2)$ et $x+3>0$ et $x+1>0$

$\iff x+3 < (x+1)^2$ et $x>-3$ et $x>-1$

$\iff x+3 < x^2+2x+1$ et $x>-1$

$\iff x^2+x-2>0$ et $x>-1$

Etude du trinôme (dans $\mathbb{R}$) :

$x_1 = 1$ racine évidente puis $x_1 . x_2 = \frac{-2}{1} \iff 1\times x_2 = -2 \iff x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où :

$\mathcal{S} = (]-\infty\,;-2[\,\cup\,]1\,;+\infty[)\cap]-1\,;+\infty[$

$\iff \mathcal{S} =]1\,;+\infty[$

Ex 2 :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}}$

Puis $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC} \iff \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} -2 = -3k \\ 2 = -k \\ -2 = -k \end{cases}$ ← incompatibles

Donc $\forall k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

$\implies$ $\boxed{\text{les points } A\,;\, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$

Rem : Ceci signifie que le triangle ABC n'est pas plat et que l'on peut définir le plan (ABC)

ⓑ Dans le R.O.N., on a :

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \boxed{2\sqrt{3}}$

$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \boxed{\sqrt{11}}$

ⓒ Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times(-3) + 2\times(-1) + (-2)\times(-1) = 6 \cancel{-2} \cancel{+2} = 6$

Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}\times\sqrt{11}}$

$\iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{3}{\sqrt{33}} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}\sqrt{33}}{\underset{11}{\cancel{33}}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$

D'où $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{33}}{11}\right) \boxed{\simeq 58{,}5° \text{ (à } 10^{-1} \text{ près)}}$

⚠ conserver la valeur exacte ⚠ Penser à configurer la calculatrice en degrés

2) ⓐ $(AB) \perp \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, tout comme $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ car $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D'où $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $1\times x + (-1)\times y + 1\times z + d = 0$

$\iff x - y + z + d = 0$

Puis $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff x_C - y_C + z_C + d = 0 \iff \cancel{-1}\cancel{+1} + 2 + d = 0 \iff d = -2$

D'où $\mathcal{P}$: $\boxed{x - y + z - 2 = 0}$

Rem : On obtenait évidemment le même résultat en prenant $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=0 \iff -2(x+1)+2(y+1)+(-2)\times(z-2)=0$$
$$\iff -2x-\cancel{2}+2y+\cancel{2}-2z+4=0$$
$$\iff -2x+2y-2z+4=0$$
$$\iff x-y+z-2=0$$

ⓑ (AB) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et passe par $A\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ donc :

$$\boxed{(AB) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = 3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

ⓒ $$E\in(AB)\cap\mathcal{P} \Rightarrow \begin{cases} x_E - y_E + z_E - 2 = 0 \\ x_E = 2+t_E \\ y_E = -t_E \\ z_E = 3+t_E \end{cases} \Rightarrow \cancel{2}+t_E-(-t_E)+3+t_E-\cancel{2}=0 \Rightarrow 3t_E+3=0 \Rightarrow t_E=-1$$

Puis $$\begin{cases} x_E = 2+t_E = 2+(-1) = 1 \\ y_E = -t_E = -(-1) = 1 \\ z_E = 3+t_E = 3+(-1) = 2 \end{cases}$$ D'où $\boxed{E\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$

ⓓ Comme E est le projeté orthogonal de C sur (AB), la droite (CE) est la hauteur du triangle ABC issue de C, i.e. relative à la base $[AB]$

On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ puis $CE=\sqrt{\overrightarrow{CE}^2}=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

D'où $$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB\times CE}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \boxed{2\sqrt{6}\ u.a.}$$

3) ⓐ On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Puis $A ; B ; C$ et F coplanaires $\iff \exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$

$$\iff \begin{cases} -1 = -2\lambda-3\mu \\ -1 = 2\lambda-\mu \\ 0 = -2\lambda-\mu \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = -4\mu \quad (L_1+L_2) \\ \lambda = \frac{1}{2}(\mu-1) \\ \lambda = -\frac{1}{2}\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

compatibles

Ainsi, $\overrightarrow{AF} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{\text{les points } A\,;B\,;C \text{ et } F \text{ sont coplanaires.}}$

(b) On a $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ donc (FD) est dirigée par $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$ i.e. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. :

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times(-2) + (-1)\times 2 + (-2)\times(-2) = -2-2+4 = 0 & \text{donc } \vec{v}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-3) + (-1)\times(-1) + (-2)\times(-1) = -3+1+2 = 0 & \text{donc } \vec{v}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (cf question 1.a) qui dirigent le plan (ABC), donc $\boxed{(FD)\perp(ABC)}$

(c) On a $\begin{cases} F\in(ABC) & \text{d'après 3.a} \\ (FD)\perp(ABC) & \text{d'après 3.b} \end{cases}$ $\Rightarrow$ [FD] est la hauteur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC

D'où $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times FD$

Par ailleurs, $FD = \sqrt{\overrightarrow{FD}^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$

Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6} = \frac{1}{\cancel{3}_{1}}\times 4\times\cancel{6}^{2} = \boxed{8 \text{ u.v.}}$

Ex 3 :

$\Rightarrow$ Partie A $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = e^x - x$

1) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ puis par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

Puis $\forall x > 0,\ h(x) = e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (th. des croissances comparées)

Donc par différence, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$

puis par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$

2) La fct h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^x - 1$

Puis $e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff e^x \geqslant e^0 \iff x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$

3) D'après le tableau de variations précédent, h est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}_+$

Donc par définition : $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow h(0) \leqslant h(a) \leqslant h(b)$

$\Rightarrow h(a) \leqslant h(b)$

$\Rightarrow \boxed{h(a) - h(b) \leqslant 0}$

=> Partie B : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction de référence, puis $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x$

On a $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$

D'où T a pour équation : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) \iff \boxed{y = x + 1}$

2) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ d'où par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$

Puis par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = \boxed{0}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} - u_n = e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} - 1 - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1\right)$$
$$= e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} \cancel{-1} - e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cancel{+1}$$
$$= e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \boxed{h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)}$$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow h\left(\frac{1}{n+1}\right) < h\left(\frac{1}{n}\right)$ cf partie A

$\Rightarrow h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ cf question 3.a

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

4) (u_n) est la forme discrète de : $f(x) - y_T$ i.e de $e^x - (x+1)$

On cherche ainsi dans le tableau la plus petite valeur de n à partir de laquelle on a $u_n < 10^{-2}$ i.e. $u_n < 0{,}01$

Il s'agit ainsi de $\boxed{n = 8}$

Ex 4 :

⇒ Partie A :

1)

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\bar{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

— Valeurs calculées

— Valeurs données dans l'énoncé

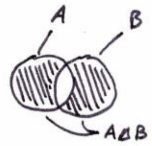
2) ⓐ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}05 = \boxed{0{,}25}$

ou $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A\cup B}) \underset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

ⓑ D'après le tableau à double entrée, $\boxed{P(A\cap B) = 0{,}05}$

ⓒ On a $\begin{cases} P(A)\times P(B) = 0{,}1\times 0{,}2 = 0{,}02 \\ P(A\cap B) = 0{,}05 \end{cases}$ $\Rightarrow P(A)\times P(B) \neq P(A\cap B) \Rightarrow$ $\boxed{\text{A et B ne sont pas indépendants}}$

3) Il s'agit de calculer la "différence symétrique" $A\Delta B$ (lire "A delta B")



$P(A\Delta B) = P(A\cup B) - P(A\cap B) = 0{,}25 - 0{,}05 = \boxed{0{,}2}$

ou $P(A\Delta B) = P((A\cap\bar{B}) \cup P(\bar{A}\cap B)) = P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$

4) $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}05\times 10 = \boxed{0{,}5}$

⇒ Partie B :

1) On répète $n = 50$ fois de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la paire de verres présente le défaut T_1" est égale à $p = P(A) = 0{,}1$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}1$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}1)}$

2) $P(X=10) = \binom{50}{10}\times p^{10}\times(1-p)^{50-10} = \binom{50}{10}\times 0{,}1^{10}\times 0{,}9^{40}$ $\boxed{\simeq 0{,}015 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}}$

3) $X\sim\mathcal{B}(50\,;\,0{,}1)$ donc $E(X) = n\times p = 50\times 0{,}1 = 5$

On trouvera donc en moyenne $\boxed{\text{5 paires de verre}}$ avec ce défaut dans un échantillon de 50 paires.