Ex 1 :

1) a) Dans le R.O.N., on a : $A\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\7\\-1\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}-4\\6\\-1\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}-3\\14\\14\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}}$

b) On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme

Puis on a dans le R.O.N. : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 5\times(-1) + 1\times 5 + 0\times(-4) = -5+5+0 = 0$

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, i.e. $(AB)\perp(AD)$

Le parallélogramme ABCD a un angle droit, donc $\boxed{\text{c'est un rectangle.}}$

c) Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{5^2+1^2+0^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \\ AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \sqrt{(-1)^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42} \end{cases}$$

Puis $\mathcal{A}_{ABCD} = AB\times AD = \sqrt{26}\times\sqrt{42} = \sqrt{2\times 13\times 2\times 3\times 7} = \boxed{2\sqrt{273} \text{ u.a.}}$

2) a) ABCD est un rectangle d'aire non nulle, donc les points A, B et D ne sont pas alignés. $\boxed{\text{Ils définissent ainsi le plan } (ABD).}$

<u>Rem :</u> On pouvait également dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

b) Dans le R.O.N., on a : $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -2\times 5 + 10\times 1 + 13\times 0 = -10+10+0 = 0 \quad \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = -2\times(-1) + 10\times 5 + 13\times(-4) = 2+50-52 = 0 \quad \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$) qui dirigent le plan (ABD). D'où $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (ABD)}$

ⓒ $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ est normal à (ABD) qui a donc une équation cartésienne de la forme :

$-2x + 10y + 13z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

or $A\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix} \in (ABD)$ donc $-2x_A + 10y_A + 13z_A + d = 0$

$\iff -2\times(-3) + 10\times 1 + 13\times 3 + d = 0$

$\iff 6 + 10 + 39 + d = 0$

$\iff d = -55$

D'où (ABD) : $\boxed{-2x + 10y + 13z - 55 = 0}$

3) ⓐ $\Delta \perp (ABD)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ est directeur de Δ , et $K\begin{pmatrix}-3\\14\\14\end{pmatrix} \in \Delta$

D'où $\boxed{\Delta : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

ⓑ Comme $\begin{cases} K \in \Delta \\ (IK) \perp (ABD) \end{cases}$, alors $(IK) = \Delta$

De plus, $I \in (ABD)$ donc $I \in (ABD) \cap \Delta$

D'où $\begin{cases} -2x_I + 10y_I + 13z_I - 55 = 0 \\ x_I = -3 - 2t_I \\ y_I = 14 + 10t_I \\ z_I = 14 + 13t_I \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(-3 - 2t_I) + 10(14 + 10t_I) + 13(14 + 13t_I) - 55 = 0$

$\Rightarrow 6 + 4t_I + 140 + 100t_I + 182 + 169t_I - 55 = 0$

$\Rightarrow 273t_I + 273 = 0$

$\Rightarrow t_I = -1$ donc I est le pt de Δ de paramètre -1

Ainsi $\begin{cases} x_I = -3 - 2t_I = -3 - 2\times(-1) = -3 + 2 = -1 \\ y_I = 14 + 10t_I = 14 + 10\times(-1) = 14 - 10 = 4 \\ z_I = 14 + 13t_I = 14 + 13\times(-1) = 14 - 13 = 1 \end{cases}$ D'où $\boxed{I\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}}$

c) On a $\begin{cases} ABCD \in (ABD) & \text{plan} \\ I \in (ABD) \\ (IK) \perp (ABD) \end{cases}$, donc (IK) est la hauteur de la pyramide $KABCD$ relative à la base $ABCD$.

rectangle

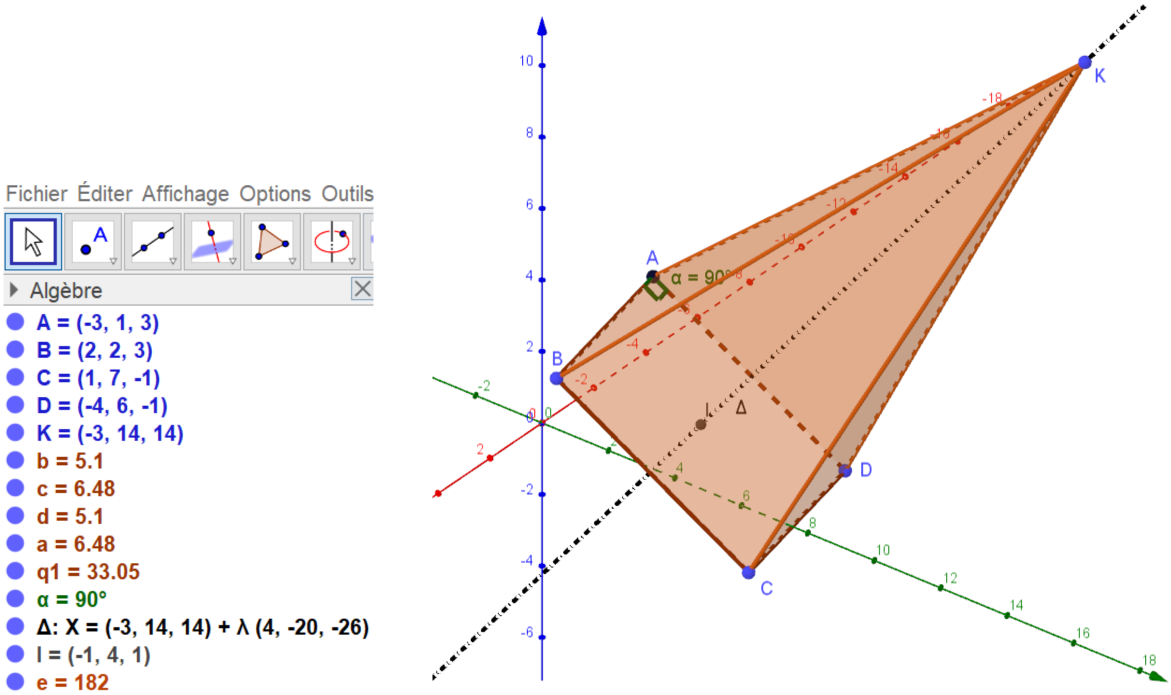
Puis dans le R.O.N., on a $I\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}-3\\14\\14\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$.

et $IK = \|\overrightarrow{IK}\| = \sqrt{\overrightarrow{IK}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 10^2 + 13^2} = \sqrt{4+100+169} = \boxed{\sqrt{273}}$ $= \sqrt{3\times 7\times 13}$ donc non simplifiable

4) D'après la question précédente :

$$\mathcal{V}_{KABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times IK = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273} = \frac{2}{3} \times 273 = \frac{2 \times \cancel{3}^{1} \times 7 \times 13}{\cancel{3}_{1}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{V}_{KABCD} = 182 \text{ u.v.}}$$



Ex 2 :

⇒ Partie A

1) Notons f_1 la fct associée à $\mathcal{C}_1$ et f_2 celle associée à $\mathcal{C}_2$

On voit que f_1 change de signe sur $I =]3 ; +\infty[$ alors que f_2 est monotone sur cet intervalle. Donc f_1 ne peut pas être f'.

D'autre part, $f_2 > 0$ sur I et f_1 strict. croissante sur cet intervalle, donc il est cohérent de penser que $f_2 = f'$ et $f_1 = f$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est représentée par } \mathcal{C}_1 \text{ et } f' \text{ est représentée par } \mathcal{C}_2}$

2) On lit sur le graphique que $f(5,6) \simeq 3$

Par ailleurs, la continuité et la stricte monotonie de f sur I garantit l'unicité de la solution. A l'approximation de lecture près, on a $\boxed{\mathcal{S} = \{5,6\}}$

3) $\boxed{f \text{ semble concave sur } I}$

⇒ Partie B :

1) Comme la fct ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on veut $x^2 - x - 6 > 0$

$x_1 = 3$ est racine évidente du trinôme,

puis $x_1 \cdot x_2 = \frac{-6}{1} \iff 3x_2 = -6 \iff x_2 = -2$

Le coefficient dominant étant positif, on a :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a bien $x^2 - x - 6 > 0$ sur $I =]3 ; +\infty[$

Donc la quantité $\boxed{\ln(x^2-x-6) \text{ est bien définie sur } I.}$

2) $\forall x \in]3 ; +\infty[$, $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

D'après le tableau de signes de la question précédente, on a :

$\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - x - 6 = 0^+$, puis comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$,

on obtient par composition : $\boxed{\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty}$

Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 3 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{C}_f.}$

D'autre part, comme une fct polynôme se comporte à l'infini comme son monôme dominant (de plus haut degré), on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x - 6 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, puis comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

on obtient par composition : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

<u>Rem:</u> On pouvait également utiliser : $\forall x > 0$, $x^2 - x - 6 = \overset{\to +\infty}{x^2}\underbrace{\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{6}{x^2}}\right)}_{\to 1}$

3) ⓐ On a $x \mapsto x^2 - x - 6$ strict. positif sur I et dérivable sur I, puis par composition, comme $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur I

$$\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}}$$

On a $\forall x \in I$, $x^2 - x - 6 > 0$ donc f' est du signe de $2x - 1$ sur I

Or $x > 3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x - 1 > 0$ par transitivité.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I}$ (On pouvait aussi résoudre $2x - 1 \geqslant 0$)

x	3		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) ⓐ f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement croissante</u> sur $I =]3;+\infty[$

De plus, $f(5) = \ln(5^2-5-6) = \ln(14) \simeq 2,64 < 3$

et $f(6) = \ln(6^2-6-6) = \ln(24) \simeq 3,18 > 3$

Comme $3 \in]f(5); f(6)[$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\boxed{\exists ! \alpha \in]5;6[, f(\alpha) = 3}$$

ⓑ Par balayage, on a : $f(5,6) < 3$ et $f(5,7) > 3$ donc $\alpha \in]5,6 ; 5,7[$

puis $f(5,63) < 3$ et $f(5,64) > 3$ donc $\boxed{\alpha \in]5,63 ; 5,64[}$

5) ⓐ f' est dérivable sur son ensemble de définition I en tant que fct rationnelle.

$$\forall x \in I, \quad f''(x) = \frac{2(x^2-x-6)-(2x-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-12-4x^2+4x-1}{(x^2-x-6)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-2x^2+2x-13}{(x^2-x-6)^2}}$$

ⓑ Comme $\forall x \in I, (x^2-x-6)^2 > 0$, f'' est du signe de $-2x^2+2x-13$ sur I

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 4 - 104 = -100 < 0$ donc aucune racine réelle

Ainsi le trinôme est du signe du coefficient dominant (-2) sur I

D'où $\forall x \in I, f''(x) < 0$

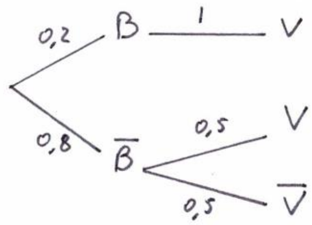
Donc $\boxed{f \text{ est concave sur } I}$

Ex 3 :

⇒ Partie 1

1) L'énoncé stipule : "S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol". Donc $\boxed{P_B(V) = 1}$

2)



3) $\{B ; \overline{B}\}$ forme une partition de l'univers (système complet d'événements)

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(V) = P(B \cap V) + P(\overline{B} \cap V) = P(B) \times P_B(V) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(V)$$
$$= 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5$$
$$= 0,2 + 0,4$$
$$= \boxed{0,6}$$

4) $P_V(B) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{2}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

⇒ Partie 2

1) On répète $n = 206$ fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le passager se présente à l'embarquement" est égale à $p = 1 - 0,05 = 0,95$. D'où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$. $\boxed{X \sim \mathcal{B}(206 ; 0,95)}$

2) $E(X) = n \times p = 206 \times 0,95 = 195,7 \simeq 196$

En moyenne, $\boxed{\text{196 passagers}}$ se présenteront à l'embarquement.

3) $P(X = 201) = \dbinom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^{5}$ $\boxed{\simeq 0,031}$ (à 10^{-3} près)

4) On utilise la fonction de répartition de la calculatrice.

$\boxed{P(X \leqslant 200) \simeq 0,948}$ (à 10^{-3} près)

La probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement soit inférieur ou égal à la capacité de l'avion est d'environ 0,948

5) ⓐ Comme $\sum_i P(Y = y_i) = 1$, on a alors :

$$P(Y=6) = 1 - \sum_{i=0}^{5} P(Y=i) = 1 - (0,94775 + 0,03063 + 0,01441 + 0,00539 + 0,00151 + 0,00028)$$
$$= 1 - 0,99997$$
$$= \boxed{0,00003} \quad (= 3 \times 10^{-5})$$

ⓑ La compagnie aérienne reçoit $206 \times 250 = 51\,500$ € pour la vente des billets.
Pour chaque passager non accepté, elle doit $250 + 600 = 850$ €, ce qui justifie que $\boxed{C = 51500 - 850\,Y}$ car Y comptabilise ces derniers passagers.

ⓒ $\forall i \in [\![0;6]\!]$, $c_i = 51500 - 850 \times y_i$ et $P(C = c_i) = P(Y = y_i)$

c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(C=c_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

$$E(C) = \sum_i (c_i \times P(C = c_i)) = 51500 \times 0,94775 + \ldots + 46400 \times 0,00003 = 51429,246$$
$$\boxed{\simeq 51429 \text{ €}} \quad (\text{à l'euro près})$$

ⓓ En vendant exactement 200 billets, la compagnie aérienne reçoit $200 \times 250 = \boxed{50\,000 \text{ €} < E(C)}$

En terme de chiffre d'affaires, il est plus intéressant pour la compagnie aérienne de pratiquer le surbooking.

Ex4:

1) (p_n) : $p_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7\, p_n^2$

ⓐ D'où $p_1 = 0,3 + 0,7 \times p_0^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = \boxed{0,363}$

et $p_2 = 0,3 + 0,7 \times p_1^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = \boxed{0,3922383}$

La probabilité que la bactérie ait au plus 1 descendance est égale à 0,363
——————————— 2 descendances est égale à 0,3922383

ⓑ Il s'agit de : $1 - p_{10} \boxed{\simeq 0,572}$ (à 10^{-3} près)

ⓒ Il semble que (p_n) soit strictement croissante et convergente

2) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

Initialisation : Pour $n = 0$, avec $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$, on a bien $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$
$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$
et montrons que $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$

On a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

$$\Rightarrow 0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant 0,7 p_n^2 \leqslant 0,7\, p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,25$$
$$\Rightarrow 0,3 \leqslant 0,3 + 0,7\, p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7\, p_{n+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,175$$
$$\Rightarrow 0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5 \quad \text{par transitivité}$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5}$

ⓑ On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_n \leqslant p_{n+1} \\ p_n \leqslant 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p_n) \text{ croissante} \\ (p_n) \text{ majorée par } 0,5 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(p_n) \text{ converge}}$ vers une limite $L \leqslant 0,5$.

3) a) Soit la fct trinôme $f : x \longmapsto 0,7x^2 + 0,3$ continue sur $\mathbb{R}$,

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Par unicité de la limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

(th. du pt fixe)

$\iff 0,7L^2 + 0,3 = L$

$\iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$

Donc $\boxed{L \text{ est bien solution de } 0,7x^2 - x + 0,3 = 0}$ (E)

b) Pour résoudre (E), calculons le déterminant.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16$

Puis $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{0,16}}{2 \times 0,7} = \dfrac{1 - 0,4}{1,4} = \dfrac{0,6}{1,4} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7} \\ x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{0,16}}{2 \times 0,7} = \dfrac{1 + 0,4}{1,4} = \dfrac{1,4}{1,4} = 1 \end{cases}$

Or d'après 2.a, $L \in [0 ; 0,5]$ donc $\boxed{L = x_1 = \dfrac{3}{7}}$ car $x_2 \notin [0 ; 0,5]$

4)

```
def suite(n):
    p = 0.3
    s = [p]
    for i in range(1, n):
        p = 0.3 + 0.7 *(p **2)
        s.append(p)
    return(s)
```

On pouvait aussi écrire $(0 ; n-1)$ ou plus simplement $(n-1)$

Nous voulons afficher les n premiers termes de la suite. Comme le premier terme (p_0) est déjà généré avant d'entrer dans la boucle, nous devons donc générer $n-1$ termes avec la boucle for.
On rappelle à toutes fins utiles qu'avec l'instruction $range$ en Python, la borne supérieure est ouverte, i.e. que la dernière valeur est exclue.
Ainsi, comme la variable i dans l'instruction de la boucle for ne se retrouve pas dans l'expression de p à l'intérieur de la boucle, cette variable agit uniquement comme un compteur.
On a donc utilisé l'instruction $range(1, n)$ mais nous aurions pu tout autant utiliser l'instruction $range(0, n-1)$ ou encore $range(2, n+1)$.
On rappelle par ailleurs que $range(0, n-1)$ se simplifie en $range(n-1)$

Voici trois exemples de scripts qui fonctionnent :

```
def suite(n):
    p=0.3
    s=[p]
    for i in range (1,n):
        p=0.3+0.7*(p**2)
        s.append(p)
    return (s)


def suite2(n):
    p=0.3
    s=[p]
    for i in range (0,n-1):
        p=0.3+0.7*(p**2)
        s.append(p)
    return (s)

def suite3(n):
    p=0.3
    s=[p]
    for i in range (n-1):
        p=0.3+0.7*(p**2)
        s.append(p)
    return (s)
```

Si on veut afficher la liste de 4 premiers termes, on obtient dans la console pour chacun des scripts :

```
>>> suite(4)
[0.3, 0.363, 0.3922383, 0.40769561879082294]
>>> suite2(4)
[0.3, 0.363, 0.3922383, 0.40769561879082294]
>>> suite3(4)
[0.3, 0.363, 0.3922383, 0.40769561879082294]
```