Ex 1 :

1) a) Si la case est blanche, le joueur extrait uniquement un jeton du sac.

Dans le sac, il y a 2 jetons pairs (perdants) et 3 jetons impairs (gagnants).

Donc $P_B(G) = \dfrac{\text{Nb jetons impairs}}{\text{Nb total de jetons}} = \dfrac{3}{5} = \boxed{0,6}$

b) Rem : La probabilité de tirer successivement et sans remise 2 jetons impairs est donnée mais on pouvait la calculer avec du dénombrement.

Il y a en effet un total de 10 paires possibles : $\binom{5}{2}$

$\Omega = \{\{1;2\} ; \{1;3\} ; \{1;4\} ; \{1;5\} ; \{2;3\} ; \{2;4\} ; \{2;5\} ; \{3;4\} ; \{3;5\} ; \{4;5\}\}$

Et seulement 3 paires de nombres impairs : $I = \{\{1;3\} ; \{1;5\} ; \{3;5\}\}$

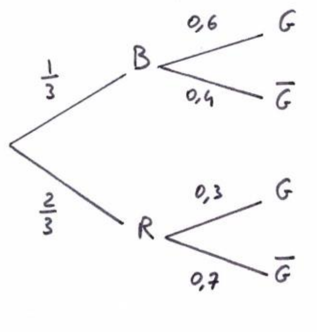
Puis la probabilité demandée est $\dfrac{Card(I)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

[On pouvait également raisonner avec des couples, avec $Card(\Omega) = A_5^2 = 20$
et 6 couples favorables $\{(1;3) ; (3;1) ; (1;5) ; (5;1) ; (3;5) ; (5;3)\}$ puis $\dfrac{Card(I)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

Puis : $P(B) = \dfrac{4}{4+8} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ et $P(R) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$

Et d'après l'énoncé, $P_R(G) = 0,3$

D'où l'arbre de probabilité :



2) a) $\{B;R\}$ forme un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales.

$$P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$$
$$= P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G)$$
$$= \frac{1}{3} \times 0{,}6 + \frac{2}{3} \times 0{,}3$$
$$= 0{,}2 + 0{,}2$$
$$= \boxed{0{,}4}$$

b) $P_G(B) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = \boxed{0{,}5}$

3) On a $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P_G(B) = 0{,}5$ donc $P(B) \neq P_G(B)$

Ainsi, $\boxed{\text{les événements B et G ne sont pas indépendants}}$

4) a) On répète 10 fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "La partie est gagnée" est égale à $p = P(G) = 0{,}4$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}4$: $X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}4)$

b) $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times p^3 \times (1-p)^{10-3}$
$$= \binom{10}{3} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^7$$
$$\boxed{\simeq 0{,}215} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}$$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$ En utilisant la fonction de répartition dans la calculatrice

$\simeq 1 - 0,382$

$\boxed{\simeq 0,618}$ (à 10^{-3} près)

Le joueur a un peu plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.

5) a) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0,4)$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_n = P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^n \\ &= 1 - 1 \times 1 \times 0,6^n \\ &= 1 - 0,6^n \end{aligned}$$

b) On cherche n tq : $p_n \geq 0,99$

$$\begin{aligned} &\iff 1 - 0,6^n \geq 0,99 \\ &\iff 0,6^n \leq 1 - 0,99 \\ &\iff 0,6^n \leq 0,01 \\ &\iff \ln(0,6^n) \leq \ln 0,01 \quad \text{ln strict. croissant sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n.\ln 0,6 \leq \ln 0,01 \\ &\iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \quad \text{car } \ln 0,6 < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \simeq 9,02$ et $n \in \mathbb{N}$

Donc il faut jouer au moins $\boxed{n = 10 \text{ parties}}$.

Ex2:

⇒ Partie A

1) Après 30 minutes, il ne reste que 90% de la quantité initiale : 0,9 mg

Une dose supplémentaire de 0,25 mg est injectée, donc $u_1 = 0,9 + 0,25 = \boxed{1,15 \text{ mg}}$

2) Toutes les 30 minutes, juste avant la dose supplémentaire, l'organisme du patient a éliminé 10% de la quantité précédente, i.e. qu'il en reste 90%, soit $0,9u_n$.

Puis on ajoute une dose supplémentaire de 0,25 mg, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 0,9 \cdot u_n + 0,25}$$

3) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1} < 5$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1,15 \end{cases}$ qui vérifie $u_0 \leqslant u_1 < 5$

$\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$

et montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 5$

On a $\underset{\text{HR}}{u_n \leqslant u_{n+1} < 5} \Rightarrow 0,9\,u_n \leqslant 0,9\,u_{n+1} < 4,5$

$\Rightarrow 0,9\,u_n + 0,25 \leqslant 0,9\,u_{n+1} + 0,25 < 4,5 + 0,25$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 4,75 < 5$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie (par transitivité)

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} < 5}$

ⓑ On a $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \leqslant u_{n+1} \\ u_n < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée (par 5)} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$, de limite réelle $\ell \leqslant 5$

⚠ L'inégalité stricte ne résiste pas au passage à la limite.

4) a)

```
def efficace():
    u=1
    n=0
    while u<1.8:
        u=0.9*u+0.25
        n=n+1
    return n
```

on écrit la négation de $u \geqslant 1,8$

définition par récurrence de (u_n)

b) On peut lancer le script en langage Python qui donne $\boxed{n=8}$

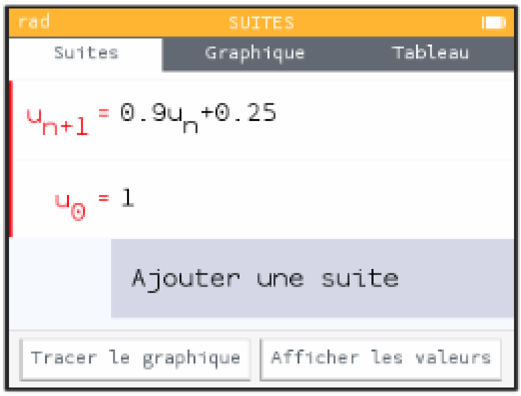
```
def efficace():
    u=1
    n=0
    while u<1.8:
        u=0.9*u+0.25
        n=n+1
    return n
```

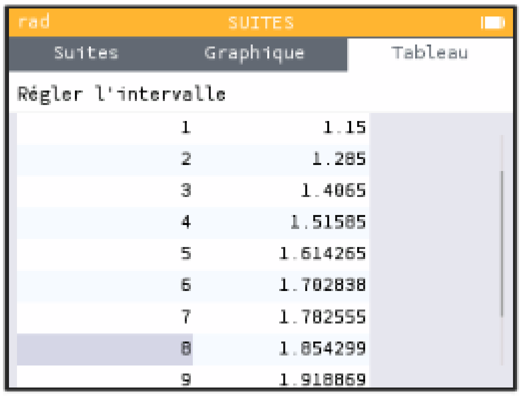
```
>>> efficace()
8
```

ou utiliser la fonction "suite" de la calculatrice, saisir l'expression de (u_n) et lire le tableau de valeurs :

on a $u_7 \simeq 1,78 < 1,8$ et $u_8 \simeq 1,85 \geqslant 1,8$ donc $\boxed{n=8}$

Ceci signifie que le médicament commence à être réellement efficace au bout de $8 \times 30 \text{ min} = \boxed{4\text{ h}}$





5) ⓐ Soit (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2{,}5 - u_n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2{,}5 - u_{n+1} = 2{,}5 - (0{,}9\, u_n + 0{,}25) = 2{,}5 - 0{,}9\, u_n - 0{,}25$

$\iff v_{n+1} = -0{,}9\, u_n + 2{,}25 = -0{,}9\, u_n + 0{,}9 \times 2{,}5 = 0{,}9\,(2{,}5 - u_n) = 0{,}9\, v_n$

Puis $v_0 = 2{,}5 - u_0 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométique de raison } q = 0{,}9 \text{ et de premier terme } v_0 = 1{,}5}$

ⓑ D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot q^n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2{,}5 - u_n \iff u_n = 2{,}5 - v_n \iff \boxed{u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n}$

ⓒ On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0{,}9^n > 0 \Rightarrow -1{,}5 \times 0{,}9^n < 0 \Rightarrow 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n < 2{,}5$

$\Rightarrow u_n < 2{,}5 < 3$

Donc d'après le modèle choisi, $\boxed{\text{le traitement ne présente aucun risque pour le patient.}}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = 2{,}5 - 1{,}5\, e^{-0{,}2t}$

1) On a : 3h 45 min = 3,75 h

Puis $f(3{,}75) = 2{,}5 - 1{,}5 \times e^{-0{,}2 \times 3{,}75} = 2{,}5 - 1{,}5 \times e^{-0{,}75} \simeq 1{,}79$

On a $f(3{,}75) < 1{,}8$ donc $\boxed{\text{le traitement n'est pas réellement efficace}}$ au bout de 3 h 45 min (mais il va le devenir très prochainement)

2) On veut $f(t) \geqslant 1{,}8 \iff 2{,}5 - 1{,}5 \cdot e^{-0{,}2t} \geqslant 1{,}8$

$\iff 1{,}5 \cdot e^{-0{,}2t} \leqslant 2{,}5 - 1{,}8$

$\iff 1{,}5 \cdot e^{-0{,}2t} \leqslant 0{,}7$

$\iff e^{-0{,}2t} \leqslant \dfrac{0{,}7}{1{,}5}$

$\iff e^{-0{,}2t} \leqslant \dfrac{7}{15}$

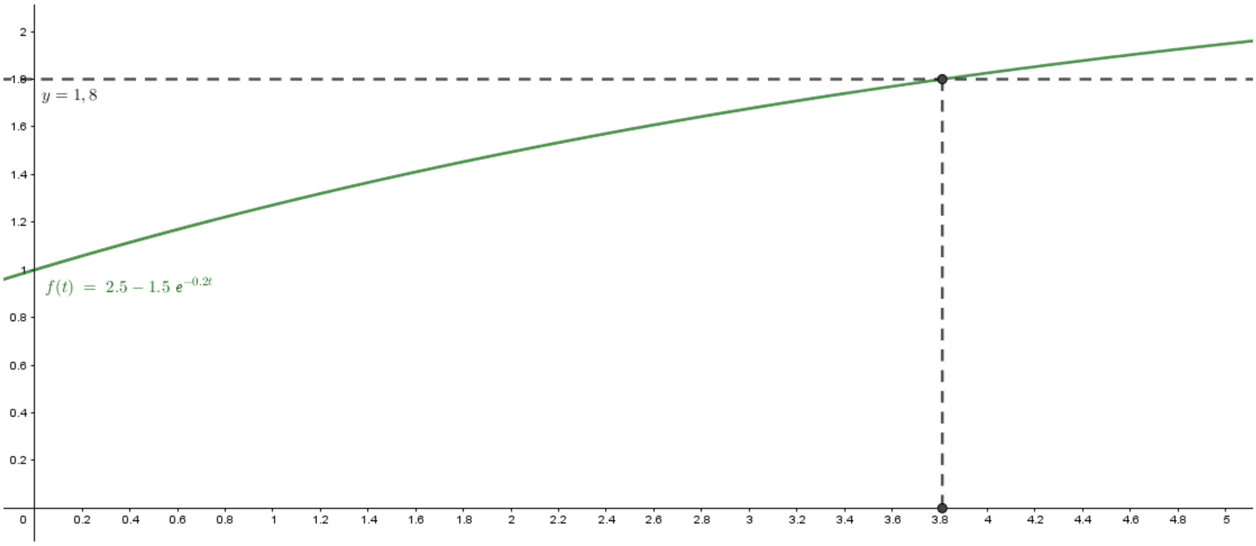
$\iff -0{,}2t \leqslant \ln\left(\dfrac{7}{15}\right)$ composition par $\ln$ strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff t \geqslant -5 \ln\left(\dfrac{7}{15}\right)$

Puis $-5\ln\left(\frac{7}{15}\right) \simeq 3{,}81$ h $\simeq 3$ h et $0{,}81 \times 60$ min $\simeq 3$ h et $48{,}6$ min

Comme on veut $t \geqslant -5\ln\left(\frac{7}{15}\right)$, le traitement sera réellement efficace à partir de $\boxed{3 \text{ h et } 49 \text{ minutes.}}$

3) Le modèle continu permet d'arriver plus rapidement au seuil de réelle efficacité car il atteint le seuil en 3 h 49 min au lieu de 4 h pour le modèle discret.



Ex3:

1) cf figure

2) Dans le R.O.N., on a $P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $Q\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Puis $PR = \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{\overrightarrow{PR}^2} = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$

et $QR = \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{\overrightarrow{QR}^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$

On a $PR = QR$ donc $\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est isocèle en } R}$

3) D'après la question précédente, PQR est isocèle donc $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\boxed{\text{les points } P ; Q \text{ et } R \text{ définissent un plan.}}$

4) ⓐ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, puis dans le R.O.N. :

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{PR} = 2\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 2 = 2+0-2 = 0 & \text{donc } \vec{u}\perp\overrightarrow{PR} \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{QR} = 2\times 1 + 1\times(-2) + (-1)\times 0 = 2-2+0 = 0 & \text{donc } \vec{u}\perp\overrightarrow{QR} \end{cases}$$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires directeurs du plan (PQR)

Donc $\boxed{\vec{u} \text{ est normal au plan } (PQR)}$

ⓑ $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in PQR \iff \vec{u}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$ avec $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$$\iff 2x + y - (z-1) = 0$$

$$\iff \boxed{2x + y - z + 1 = 0}$$

ⓒ $(d)\perp(PQR)$ donc $\vec{u}$ normal à (PQR) est directeur de (d)

On a également $E\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\in(d)$

D'où : $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

d) L est le projeté orthogonal de E sur (PQR), donc $(LE) = (d)$

Ainsi, $L \in (d) \cap (PQR)$, d'où :

$$\begin{cases} 2x_L + y_L - z_L + 1 = 0 \\ x = 2t_L \\ y = t_L \\ z = 3 - t_L \end{cases} \Rightarrow 2 \times 2t_L + t_L - (3 - t_L) + 1 = 0$$

$\Rightarrow 5t_L - 3 + t_L + 1 = 0$

$\Rightarrow 6t_L - 2 = 0$

$\Rightarrow t_L = \frac{1}{3}$ puis $L\begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{L\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}}$

Rem : les coordonnées de L étant données dans l'énoncé, on pouvait se contenter de vérifier que $L \in (d)$ et $L \in (PQR)$ au lieu de résoudre le système.

e) L est le proj. orth. de E sur (PQR), donc $\text{dist}(E, (PQR)) = LE$, avec $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

D'où $\text{dist}(E, (PQR)) = \sqrt{\overrightarrow{LE}^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

5) On a EQR triangle rectangle en E avec $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $ER = 1$ et $EQ = 2$

D'où $\mathcal{A}_{EQR} = \frac{1}{2} \times EQ \times ER = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ u.a.

Puis comme $(EQR) = (EFG)$ et $(EP) = (EA)$, on a $(EP) \perp (EQR)$ ← plan

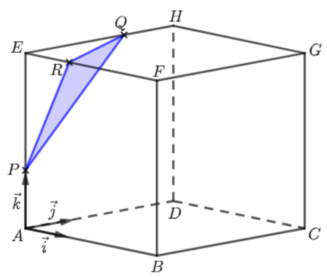
Donc (EP) est la hauteur du tétraèdre $EPQR$ relative à la base EQR ← triangle

D'où $\mathcal{V}_{EPQR} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{EQR} \times EP = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u.v.}}$ car $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $EP = 2$

6) Comme $(EL) \perp (PQR)$ et $L \in (PQR)$, la droite (EL) est la hauteur du tétraèdre $EPQR$ relative à la base PQR.

D'où $\mathcal{V}_{EPQR} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{PQR} \times EL$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{PQR} = \frac{3 \cdot \mathcal{V}_{EPQR}}{EL} = \frac{\cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = 2 \times \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{6}\sqrt{6}}{\cancel{6}} = \boxed{\sqrt{6} \text{ u.a.}}$



Ex4 :

⇒ Partie A

1) On lit directement : $\boxed{f(1) = 3}$

Puis $f'(1)$ est le coefficient directeur de (AB), donc $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{3-1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

2) Soient $(a;b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(ax^2+1) + b$

a) Comme $\forall (a;x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $ax^2+1 > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}}$$

b) On a : $\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2a}{a+1} = 1 \\ \ln(a+1) + b = 3 \end{cases} \overset{a>0}{\iff} \begin{cases} 2a = a+1 \\ b = 3 - \ln(a+1) \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - \ln 2 \end{cases}$

D'où $\boxed{(a;b) = (1;\ 3-\ln 2)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+1) + 3 - \ln 2$

⇒ Partie B

1) $D_f = \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, puis

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \ln((-x)^2+1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2+1) + 3 - \ln 2 = f(x)$

Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$, et on a $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ ⇒ Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Par ailleurs, comme f est paire, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) D'après la partie A.2.a, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}$

et comme $a = 1$ (cf partie A.2.b), on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$ donc f' est du signe de $2x$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(0^2+1)+3-\ln 2 \\ &= \ln 1 + 3 - \ln 2 \\ &= 0 + 3 - \ln 2 \\ &= 3-\ln 2 \end{aligned}$$

4) D'après le tableau de variations, $f(x)=k$ admet 2 solutions pour $\boxed{k \in]3-\ln 2\,;\,+\infty[}$

5) $f(x) = 3+\ln 2 \iff \ln(x^2+1) \cancel{+3} - \ln 2 = \cancel{3} + \ln 2 \iff \ln(x^2+1) = 2\ln 2 \iff \ln(x^2+1) = \ln(2^2)$

$\iff x^2+1 = 4$ et $x^2+1>0 \iff x^2 = 3$ et $x \in \mathbb{R} \iff x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}}$

$\Rightarrow$ Partie C

1) Il semble que $\mathcal{C}_f$ admette 2 points d'inflexion I et A d'abscisses $\boxed{x_I = -1 \text{ et } x_A = 1}$

2) f' est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ donc f'' est du signe de $1-x^2$, trinôme du second degré admettant pour racines -1 et 1, et de coefficient dominant négatif.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	pt d'inflexion I	convexe	pt d'inflexion A	concave	

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est convexe sur } [-1\,;\,1]}$