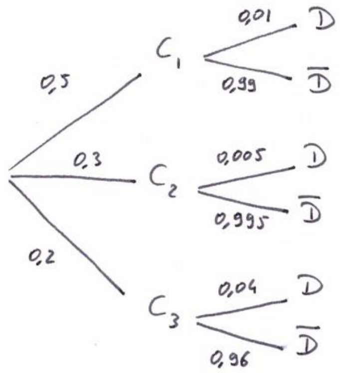
Ex 1 :

⇒ Partie A

1)



2) $P(C_3 \cap D) = P(C_3) \times P_{C_3}(D) = 0{,}2 \times 0{,}04 \boxed{= 0{,}008}$

3) $\{C_1 \,;\, C_2 \,;\, C_3\}$ forment un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + P(C_3 \cap D)$$
$$= P(C_1) \times P_{C_1}(D) + P(C_2) \times P_{C_2}(D) + 0{,}008$$
$$= 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}005 + 0{,}008$$
$$= 0{,}005 + 0{,}0015 + 0{,}008$$
$$\boxed{= 0{,}0145}$$

4) $P_D(C_3) = \dfrac{P(C_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}008}{0{,}0145} = \dfrac{80}{145} \boxed{= \dfrac{16}{29} \simeq 0{,}5517}$ (à 10^{-4} près)

⇒ Partie B

1) a) $X \sim \mathcal{B}(20 \,;\, 0{,}0145)$

D'où $P(X=3) = \dbinom{20}{3} \times 0{,}0145^3 \times (1-0{,}0145)^{20-3} \boxed{\simeq 0{,}0027}$ (à 10^{-4} près)

b) $P(X=0) = \binom{20}{0} \times 0{,}0145^0 \times (1-0{,}0145)^{20-0} = 1 \times 1 \times 0{,}9855^{20} = 0{,}9855^{20}$

$\Leftrightarrow \boxed{P(X=0) \simeq 0{,}7467}$ (à 10^{-4} près)

Puis $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \simeq 1 - 0{,}7467 \boxed{\simeq 0{,}2533}$ (à 10^{-4} près)

2) Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}0145)$ avec $n \in \mathbb{N}$

On veut $P(X=0) > 0{,}85$

$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0{,}0145^0 \times (1-0{,}0145)^{n-0} > 0{,}85$

$\Leftrightarrow 1 \times 1 \times 0{,}9855^n > 0{,}85$

$\Leftrightarrow 0{,}9855^n > 0{,}85$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}9855^n) > \ln 0{,}85$

$\Leftrightarrow n \times \ln 0{,}9855 > \ln 0{,}85$ car $\ln 0{,}9855 < 0$

$\Leftrightarrow n < \dfrac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}9855}$

Or $\dfrac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}9855} \simeq 11{,}13$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

donc il faut avoir $n \leqslant 11$

Le directeur a donc raison.

⇒ Partie C :

le coût moyen d'un composant : Prix $= 15 \times P(C_1) + 12 \times P(C_2) + 9 \times P(C_3)$

$= 15 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}3 + 9 \times 0{,}2$

$= 7{,}5 + 3{,}6 + 1{,}8$

$\boxed{= 12{,}9 \text{ €}}$

Ex 2 :

=> Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = 2(x-1) - x \ln x$

1) $g(1) = 2\times(1-1) - 1\times \ln 1 = 2\times 0 - 1\times 0 = \boxed{0}$

$g(e) = 2.(e-1) - e . \ln e = 2e - 2 - e\times 1 = \boxed{e-2}$

2) D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2(x-1) = 2\times(0-1) = -2$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -2}$

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) &= 2(1-0) - \left(1\times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)\\ &= 2 - (\ln(x) + 1)\\ &= \boxed{1 - \ln x}\end{aligned}$$

Puis $g'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 1 \iff x \leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ -2	↗	$e-2$	↘	$-\infty$

admis dans l'énoncé
(se démontre en écrivant $g(x) = \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{(2-\ln x)}_{-\infty} - 2$)

4) Il faut procéder par disjonction de cas selon la monotonie de g.
On travaillera sur $]0 ; e]$ et sur $]e ; +\infty[$, et on n'oubliera pas de conclure

* Sur $]0;e]$, g est continue (car dérivable) et strictement croissante.

On a donc $g(]0;e]) = \left] \lim_{x \to 0^+} g(x) \,;\, g(e) \right] =]-2\,;\,e-2]$, avec $e-2 \simeq 0{,}7 > 0$

Comme $0 \in g(]0;e])$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;e]$.

En utilisant la 1ère question, comme $1 \in]0;e]$ et $g(1) = 0$, 1 est cette unique solution

* Sur $]e;+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

On a donc $g(]e;+\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x) \,;\, g(e) \right[=]-\infty\,;\,e-2[$

⚠ inversion des bornes

Comme $0 \in g(]e;+\infty[)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]e;+\infty[$

Puis par balayage avec la calculatrice :

$g(4) > 0$ et $g(5) < 0$ donc $\alpha \in]4\,;\,5[$

$g(4{,}9) > 0$ et $g(5) < 0$ donc $\alpha \in]4{,}9\,;\,5[$

$g(4{,}92) > 0$ et $g(4{,}93) < 0$ donc $\boxed{\alpha \in]4{,}92\,;\,4{,}93[}$

* Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}_+^*$: 1 et $\alpha \in]4{,}92\,;\,4{,}93[$

5) On en déduit le tableau de signes de g, en utilisant les questions 3 et 4 :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

⇒ Partie B : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$" que l'on lève en factorisant par x

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x(3 - \ln x) - 2\ln x$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \ln x = -\infty$

Par produit, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} x(3 - \ln x) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln x = -\infty$, donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) ⓐ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit puis sommes de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 3 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - 2 \times \frac{1}{x}$$
$$= 3 - \ln(x) - 1 - 2 \times \frac{1}{x}$$
$$= 2 - \ln x - \frac{2}{x}$$
$$= \frac{2x - x\ln(x) - 2}{x}$$
$$= \frac{2(x-1) - x\ln x}{x}$$
$$= \boxed{\frac{g(x)}{x}}$$

ⓑ Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ (évident...), f' est du signe de g

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

← partie A, question 5)

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donné dans l'énoncé (qui s'obtient avec th. croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

De plus, $f(1) = 3\times 1 - 1\times \ln(1) - 2\times \ln(1) = 3 - 1\times 0 - 2\times 0 = 3$

Et $f(\alpha) = 3\alpha - \alpha\ln(\alpha) - 2\ln(\alpha)$

__Rem :__ Pour briller, on peut affiner $f(\alpha)$ en partant du fait que $g(\alpha) = 0$

$g(\alpha) = 0 \iff 2(\alpha - 1) - \alpha\ln\alpha = 0 \iff \alpha\ln\alpha = 2(\alpha-1) \underset{\text{car } \alpha\neq 0}{\iff} \ln\alpha = \dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha}$

Puis $f(\alpha) = 3\alpha - \alpha\ln(\alpha) - 2\ln\alpha = 3\alpha - 2(\alpha-1) - 2\times\dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha}$

$\iff f(\alpha) = 3\alpha - 2\alpha + 2 - \dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha} = \alpha + 2 - \dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha}$

$\iff f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha + 4}{\alpha} = \boxed{\dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 4}{\alpha}}$

3) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, f'' est du signe de $2 - x$

On a donc $f''(x) \geqslant 0 \iff 2 - x \geqslant 0 \iff x \leq 2$

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
convexité de f	‖	convexe	Inflexion	concave	

Comme $f(2) = 3\times 2 - 2\times\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2$,

$\boxed{\text{le point d'inflexion de } f \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 2 \\ 6 - 4\ln 2 \end{pmatrix}}$

Ex 3 :

1) Chaque année la population diminue de 10 %, i.e. $\boxed{\text{qu'il reste 90 \%}}$, justifiant le terme $0{,}9.u_n$ dans l'expression de u_{n+1}.

$\boxed{\text{On rajoute ensuite 100 individus par an}}$, ce qui permet d'écrire que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 100$ (suite arithmético-géométrique)

2) $u_1 = 0{,}9 \times u_0 + 100 = 0{,}9 \times 2000 + 100 = 9 \times 200 + 100 = 1800 + 100 \boxed{= 1900}$

$u_2 = 0{,}9 \times u_1 + 100 = 0{,}9 \times 1900 + 100 = 9 \times 190 + 100 = 1710 + 100 \boxed{= 1810}$

3) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_1 = 1900 \end{cases} \Rightarrow 1000 < u_1 \leqslant u_0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$

et montrons que $1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

On a $\underset{\text{HR}}{1000 < u_{n+1} \leqslant u_n} \Rightarrow 900 < 0{,}9.u_{n+1} \leqslant 0{,}9.u_n$

$\Rightarrow 1000 < 0{,}9\, u_{n+1} + 100 \leqslant 0{,}9.u_n + 100$

$\Rightarrow 1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1000 < u_{n+1} \leqslant u_n}$

4) D'après la question précédente :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow (u_n) \text{ décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1000 < u_n \Rightarrow (u_n) \text{ minorée (par 1000)} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geqslant 1000}$. (L'inégalité stricte ne résiste pas au passage à la limite)

5) a) Soit (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 1000$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0{,}9\, u_n + 100 - 1000 = 0{,}9\, u_n - 900$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 0{,}9\, u_n - 0{,}9 \times 1000 = 0{,}9 \times (u_n - 1000) = 0{,}9 . v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$

b) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = (u_0 - 1000) . 0{,}9^n = (2000 - 1000) \times 0{,}9^n$

$$\Leftrightarrow v_n = 1000 \times 0{,}9^n$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 1000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1000$

$$\Leftrightarrow u_n = 1000 \times 0{,}9^n + 1000$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1000(1 + 0{,}9^n)$$

c) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ (suite géométrique de raison $q \in]-1;1[$)

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000(1+0) = 1000$

$\boxed{\text{A très long terme, la population de l'espèce se stabilisera à 1000 individus.}}$

6) a) On veut $u_n \leq 1020 \Leftrightarrow 1000(1 + 0{,}9^n) \leq 1020$

$$\Leftrightarrow 1 + 0{,}9^n \leq 1{,}02$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}02$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) \leq \ln 0{,}02 \quad \text{par (stricte) croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}02$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}9} \quad \text{car } \ln 0{,}9 < 0$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}9} \simeq 37{,}1$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc il faudra attendre au moins $\boxed{n = 38}$ années.

b) Deux possibilités s'offraient à nous pour répondre à cette question.

La réponse la plus facile était celle faisant intervenir la forme récurrente de la suite :

```
def population(S):
    n=0
    u=2000
    while u>S:
        u=0.9*u+100
        n=n+1
    return n
```

Une autre possibilité (que nous nommons ici « *population2* ») consistait à faire intervenir la forme explicite de la suite.
Par contre la structure imposée du programme nécessitait de renvoyer $n-1$, et non pas n

```
def population2(S):
    n=0
    u=2000
    while u>S:
        u=1000*(1+0.9**n)
        n=n+1
    return n-1
```

Voici un exemple de retour dans la console :

```
>>> population(1020)
38
>>> population(1012)
42
>>> population(1004)
53
>>> population2(1020)
38
>>> population2(1012)
42
>>> population2(1004)
53
```

Ex4 :

1) a) Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

qui $\boxed{\text{ne sont pas colinéaires}}$ car leurs deuxièmes coordonnées sont égales mais pas les autres. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent le plan (ABC)

Rem : On pourrait résoudre le système suivant :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2k \\ -4 = -4k \\ -2 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 1 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$

Les équations sont incompatibles donc $\forall k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{AC}$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

b) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times 6 + 2\times(-4) + (-1)\times(-2) = 6 - 8 + 2 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times(-4) + (-1)\times(-6) = 2 - 8 + 6 = 0 & \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, non colinéaires (voir a)), qui dirigent le plan (ABC), donc $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (ABC).}}$

c) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow 1\times(x-0) + 2(y-8) + (-1)\times(z-6) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 16 - z + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x + 2y - z - 10 = 0}$

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $D\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$ est directeur de (DE), tout comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{DE}$.

De plus, $D\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} \in (DE)$, donc (DE) admet pour représentation paramétrique

$$\boxed{(DE) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 6 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

ⓑ I milieu de $[BC] \iff \begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{6+2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$

Puis $I\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \in (DE) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_I = t \\ y_I = t \\ z_I = 6 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \\ 6 - t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \\ t = 6 - 2 = 4 \end{cases}$ compatible

Donc $\boxed{I\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \in (DE)}$, il s'agit du point de (DE) de paramètre 4

3) ⓐ Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \text{ u.l.} \\ AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \text{ u.l.} \\ BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ u.l.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{le triangle ABC est isocèle en A}}$ et ne peut pas être rectangle car $BC < AB$

⚠ On ne peut pas conclure tant qu'on n'a pas calculé BC et qu'on n'a pas vérifié si le triangle peut être rectangle (on pouvait calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ou réciproque th. Pythagore.

(b) Comme I est le milieu de [BC] et ABC est isocèle en A, (AI) est la hauteur du triangle ABC issue de A, donc relative à la base [BC]

On calcule AI :

$$AI = \|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2 + (z_I - z_A)^2}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (4-8)^2 + (2-6)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 16 + 16}$$
$$= \sqrt{48}$$
$$= 4\sqrt{3} \text{ u.l.}$$

OU

Pour les nostalgiques du collège :
Dans le triangle AIB rectangle en I,
D'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 \iff AI^2 = AB^2 - IB^2$$
$$\iff AI^2 = \sqrt{56}^2 - \left(\tfrac{1}{2} BC\right)^2$$
$$\iff AI^2 = 56 - \tfrac{1}{4} \times \sqrt{32}^2$$
$$\iff AI^2 = 56 - 8$$
$$\iff AI^2 = 48$$

D'où $AI = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ u.l. car $AI > 0$

Enfin, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AI \times BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{6} \text{ u.a.}}$

(c) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 2 + (-4) \times (-4) + (-2) \times (-6)$
$= 12 + 16 + 12$
$= \boxed{40}$

(d) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$\iff \cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{40}{\sqrt{56} \times \sqrt{56}} = \dfrac{40}{56} = \dfrac{5}{7}$

Puis $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{7}\right) \boxed{\simeq 44{,}4°}$ (à 10^{-1} près) ⚠ Calculatrice en mode "degré"

4) On donne $H\begin{pmatrix} 5/3 \\ 10/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 5/3 \\ 10/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que $\overrightarrow{OH} = \dfrac{5}{3}\vec{n}$ donc $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires,

ce qui permet d'affirmer que $\overrightarrow{OH}$ est normal au plan (ABC) d'équation

cartésienne : $x + 2y - z - 10 = 0$

Il est clair que $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin (ABC)$

Et on a $x_H + 2y_H - z_H - 10 = \dfrac{5}{3} + 2 \times \dfrac{10}{3} - \dfrac{-5}{3} - 10 = \dfrac{5+20+5}{3} - 10 = \dfrac{30}{3} - 10 = 0$

donc $H \in (ABC)$.

Ainsi, on a : $\begin{cases} \overrightarrow{OH} \text{ normal à } (ABC) \\ O \notin (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases}$ donc $\boxed{\text{H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC)}}$

On en déduit que :

$d(O ; (ABC)) = OH = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{\overrightarrow{OH}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-5}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{9} + \dfrac{100}{9} + \dfrac{25}{9}}$

$\iff d(O ; (ABC)) = \sqrt{\dfrac{150}{9}} = \dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 6}}{3} = \dfrac{\sqrt{25} \times \sqrt{6}}{3} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{6}}{3}}$ u.l.