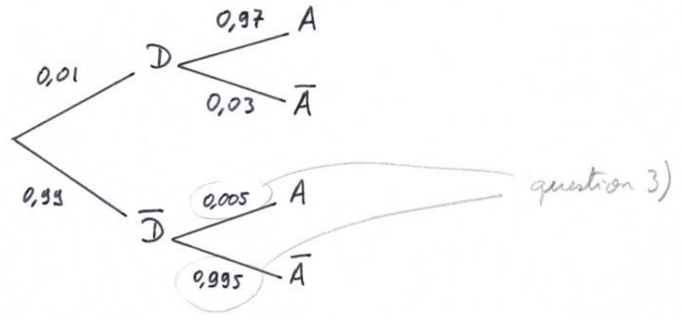
Ex 1 :

⇒ Partie A

1)



2) ⓐ $P(D\cap A) = P(D)\times P_D(A) = 0{,}01\times 0{,}97 = \boxed{0{,}0097}$

ⓑ $P_A(D) = \dfrac{P(D\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}0097}{0{,}01465} = \dfrac{970}{1465} \boxed{= \dfrac{194}{293} \simeq 0{,}662}$ (à 10^{-3} près)

3) $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D}\cap A)}{P(\overline{D})}$

Or $\{D\,;\,\overline{D}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales

$P(A) = P(D\cap A) + P(\overline{D}\cap A) \iff P(\overline{D}\cap A) = P(A) - P(D\cap A)$

$= 0{,}01465 - 0{,}0097$

$= 0{,}00495$

D'où $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D}\cap A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}00495}{0{,}99} = \dfrac{495}{99000} = \dfrac{1}{200} = \boxed{0{,}005}$

4) Notons N : "l'alarme fonctionne normalement".

D'où $P(\overline{N}) = P\left((D\cap\overline{A})\cup(\overline{D}\cap A)\right)$

$= P(D\cap\overline{A}) + P(\overline{D}\cap A)$ ↲ union disjointe (événements incompatibles)

$= P(D)\times P_D(\overline{A}) + 0{,}00495$

$= 0{,}01\times 0{,}03 + 0{,}00495$

$= 0{,}0003 + 0{,}00495$

$= 0{,}00525 < 0{,}01$ donc $\boxed{P(\overline{N}) < 0{,}01}$

⇒ Partie B

(assimilé tirage avec remise)

1) On répète $n = 5$ fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " l'alarme ne fonctionne pas normalement " est $p = P(S) = P(\overline{N})$, i.e. $p = 0{,}00525$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}00525$.

D'où $\boxed{X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}00525)}$

2) $P(X=1) = \binom{5}{1} \times p^1 \times (1-p)^{5-1} = 5 \times 0{,}00525 \times (1-0{,}00525)^4 \boxed{\simeq 0{,}0257}$ (à 10^{-4} près)

3) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \times p^0 \times (1-p)^{5-0} = 1 - 0{,}99475^5 \boxed{\simeq 0{,}0260}$ (à 10^{-4} près)

⇒ Partie C

Désormais, $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}00525)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Puis
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) > 0{,}07 &\iff 1 - P(X=0) > 0{,}07 \\ &\iff P(X=0) < 0{,}93 \\ &\iff \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^n < 0{,}93 \\ &\iff 1 \times 1 \times 0{,}99475^n < 0{,}93 \\ &\iff \ln(0{,}99475^n) < \ln 0{,}93 \quad \text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n \times \ln 0{,}99475 < \ln 0{,}93 \\ &\iff n > \frac{\ln 0{,}93}{\ln 0{,}99475} \quad \text{car } \ln 0{,}99475 < 0 \end{aligned}$$

Or on a $\dfrac{\ln 0{,}93}{\ln 0{,}99475} \simeq 13{,}8$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Il faut donc prélever $\boxed{\text{au moins } n = 14}$ systèmes d'alarme.

Ex2 :

Soit (u_n) : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5} \times u_n^2$

1) a) $u_1 = \frac{1}{5} \times u_0^2 = \frac{1}{5} \times 4^2 = \boxed{\frac{16}{5}}$

$u_2 = \frac{1}{5} \times u_1^2 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{256}{125}}$

b)
```
def suite_u(p):
    u = 4
    for i in range(1, p+1):
        u = 0.2 * (u ** 2)
    return u
```

⚠ En Python, dans l'instruction "range", la borne supérieure est ouverte.

ou u * u / 5 ou autres possibilités

2) a) Démontrons par récurrence $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 4$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ donc $0 < u_0 \leqslant 4 \Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 < u_n \leqslant 4$ et mq $0 < u_{n+1} \leqslant 4$

$0 < u_n \leqslant 4 \Rightarrow 0 < u_n^2 \leqslant 16$
(HR)

$\Rightarrow 0 < \frac{u_n^2}{5} \leqslant \frac{16}{5}$

par transitivité, car $\frac{16}{5} < 4$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 4$

$\Rightarrow P(n+1)$ vraie

Conclusion : $P(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < u_n \leqslant 4}$

b) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

⚠ Ne pas oublier

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5} u_n^2}{u_n} = \frac{1}{5} u_n$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{5} u_n \leqslant \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{4}{5} < 1$

Donc (u_n) est (strictement) décroissante

c) (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \geqslant 0$.

3) a) Deux rédactions possibles :

Par unicité de la limite, comme (u_n) converge vers ℓ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} \iff \boxed{\ell = \frac{1}{5}\ell^2}$$

OU Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}x^2$, continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Puis comme (u_n) converge vers ℓ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, i.e. $\boxed{\frac{1}{5}\ell^2 = \ell}$

b) $$\frac{1}{5}\ell^2 = \ell \iff \frac{1}{5}\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell^2 - 5\ell = 0$$
$$\iff \ell(\ell - 5) = 0$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 5$$

Or on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 4$ donc on ne peut pas retenir la solution $\ell = 5$.

La solution $\boxed{\ell = 0}$ convient car l'inégalité stricte (ici en 0) ne résiste pas au passage à la limite.

D'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

<u>Rem :</u> Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 4$, on peut préciser $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0^+}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln 5$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5} \cdot u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n^2) = -\ln 5 + 2\ln(u_n)$

$= 2v_n - \ln 5$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - \ln 5 = 2v_n - \ln 5 - \ln 5 = 2v_n - 2\ln 5 = 2(v_n - \ln 5)$

$= 2w_n$

Donc (w_n) est géométrique de raison $q = 2$

ⓒ Comme $w_0 = v_0 - \ln 5 = \ln(u_0) - \ln 5 = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \cdot q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - \ln 5 \iff v_n = w_n + \ln 5 \iff v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln 5$

5) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ (suite géométrique de raison $q > 1$)

et comme $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$, par produit, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$

Enfin par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, on obtient par composition : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+}$

Ex3 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$

$\Rightarrow$ Partie A :

1) $g(e) = 1 + e^2(1 - 2\ln e) = 1 + e^2(1 - 2\times 1) = 1 - e^2$

or $e > 1 \Rightarrow e^2 > 1 \Rightarrow -e^2 < -1 \Rightarrow 1 - e^2 < 0 \Rightarrow \boxed{g(e) < 0}$

2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ puis par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty$

Par somme, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-2\ln x) = -\infty$

Puis par somme avec une constante, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

3) ⓐ la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après l'énoncé, d'où

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = 0 + 2x(1 - 2\ln x) + x^2\left(0 - 2\times\frac{1}{x}\right)$

$= 2x - 4x\ln x - 2x$

$= \boxed{-4x\ln x}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $4x > 0$ donc g' est du signe de $-\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	||	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 + 1^2\times(1 - 2\times\ln 1)$
$= 1 + 1\times(1 - 0)$
$= 2$

Rem : en factorisant g et avec th. croissances comparées, on pourrait prouver que $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$

ⓒ g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Par ailleurs, $g([1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \,;\, g(1)\right] =]-\infty\,;\,2]$

Or $0 \in g([1;+\infty[)$ donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ,\ g(\alpha) = 0}$

ⓓ On procède par balayage avec la calculatrice :

$g(1{,}8) > 0$ et $g(1{,}9) < 0$ donc $\alpha \in]1{,}8\,;\,1{,}9[$

puis $g(1{,}89) > 0$ et $g(1{,}90) < 0$ donc $\boxed{\alpha \in]1{,}89\,;\,1{,}9[}$

4) Comme g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, on a :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

=> Partie B.

1) On admet que : $\forall x \in [1;\alpha]$, $g''(x) = -4(\ln(x)+1)$

On a : $\forall x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$

Donc $\forall x \in [1;\alpha]$, $\ln x \geqslant 0 \iff \ln(x)+1 \geqslant 1$

$\iff -4(\ln(x)+1) \leqslant -4$

$\Rightarrow g''(x) \leqslant 0$

On en conclut que $\boxed{g \text{ est concave sur } [1;\alpha]}$

2) ⓐ On a $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$ et (AB) a une éq. réduite de la forme $y = mx + p$ avec $(m;p) \in \mathbb{R}^2$

Puis $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{\alpha - 1} = \dfrac{-2}{\alpha-1}$

D'où $(AB) : \quad y = \dfrac{-2}{\alpha-1}x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$

Enfin, $B\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} \in (AB)$ donc $y_B = \dfrac{-2}{\alpha-1} \times x_B + p$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{-2}{\alpha-1} \times \alpha + p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

Ainsi, (AB) a pour équation réduite : $\boxed{y = \dfrac{-2}{\alpha-1} \cdot x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$

ⓑ Comme g est concave sur $[1;\alpha]$, $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de toutes ses cordes, en particulier $[AB]$

D'où $\boxed{\forall x \in [1;\alpha],\ g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$

Ex 4 :

1) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\boxed{H\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}}$

ⓑ $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ dirige (GH) et $H\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \in (GH)$, donc on obtient la représentation paramétrique suivante : $\boxed{(GH)\begin{cases}x = 5t\\ y = 3\\ z = 2\end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

2) ⓐ Soit $k \in [0;1]$,

$\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \begin{cases}x_M - x_H = k(x_G - x_H)\\ y_M - y_H = k(y_G - y_H)\\ z_M - z_H = k(z_G - z_H)\end{cases} \iff \begin{cases}x_M - 0 = k(5-0)\\ y_M - 3 = k(3-3)\\ z_M - 2 = k(2-2)\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x_M = 5k\\ y_M = 3\\ z_M = 2\end{cases}}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}5k\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}5k-5\\0\\2\end{pmatrix}$ car $C\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 5k(5k-5) + 3\times 0 + 2\times 2 = \boxed{25k^2 - 25k + 4}$

ⓒ AMC rectangle en M $\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$

$\iff 25k^2 - 25k + 4 = 0$

$\Delta = (-25)^2 - 4\times 25\times 4 = 25(25-16) = 25\times 9 = 225$

Puis $\begin{cases}x_1 = \dfrac{-(-25)-\sqrt{225}}{2\times 25} = \dfrac{25-15}{50} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2\\[2ex] x_2 = \dfrac{-(-25)+\sqrt{225}}{2\times 25} = \dfrac{25+15}{50} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8\end{cases}$

Donc $\boxed{\text{AMC rectangle en M} \iff k \in \{0{,}2 ; 0{,}8\}}$

3) Désormais, $M\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ qui correspond à $k=\frac{1}{5}$ de la question précédente

Ceci implique que AMC est rectangle en M

Soit $K\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

ⓐ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal à (ACD) car ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ est normal à (ACD), en particulier $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc (ACD) a une équation cartésienne de la forme :

$0.x+0\times y+1\times z+d=0 \iff z+d=0$

Or $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in(ACD)$ donc $z_A+d=0 \iff d=0$

Finalement, (ACD) a pour équation cartésienne : $\boxed{z=0}$

<u>Rem:</u> On pouvait aussi simplement dire que (ACD) est constitué de tous les points de cote nulle.

ⓑ On a $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MK}$ est normal à (ACD)

$\left.\begin{array}{l}\text{D'où } (MK)\perp(ACD)\\ \text{De plus, } z_K=0 \text{ donc } K\in(ACD)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{K est le projeté orthogonal de M sur (ACD)}}$

ⓒ D'après la question précédente, [MK] est la hauteur du tétraèdre MACD relative à la base ACD, triangle rectangle D

On a $AD=3$; $DC=AB=5$

Et $MK=\|\overrightarrow{MK}\|=\sqrt{\overrightarrow{MK}^2}=\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}=2$

$$\begin{aligned}\text{D'où } V_{MACD}&=\frac{1}{3}\cdot\mathcal{A}_{ACD}\times MK\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\times MK\\&=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{3}\times5\times\cancel{2}\\&\boxed{=5\ (u.v.)}\end{aligned}$$

4) Soit P le projeté orthogonal de D sur (AMC)

Donc [DP] est la hauteur du tétraèdre MACD relative à la base AMC, triangle rectangle en M.

On a $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2} AM \times MC$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2} = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \quad (u.l.) \\ CM = \|\overrightarrow{CM}\| = \sqrt{\overrightarrow{CM}^2} = \sqrt{(-4)^2+0^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (u.l.) \end{cases}$

D'où $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2} AM \times MC = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{14} \times \cancel{2}\sqrt{5} = \sqrt{70}$ (u.a)

Puis $V_{MACD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AMC} \times DP$

$$\iff DP = \frac{3\,V_{MACD}}{\mathcal{A}_{AMC}} = \frac{3\times 5}{\sqrt{70}} = \frac{15\sqrt{70}}{70} \boxed{= \frac{3\sqrt{70}}{14}}$$

$$\boxed{\simeq 1{,}8 \text{ u.l.}}$$

(à 10^{-1} près)