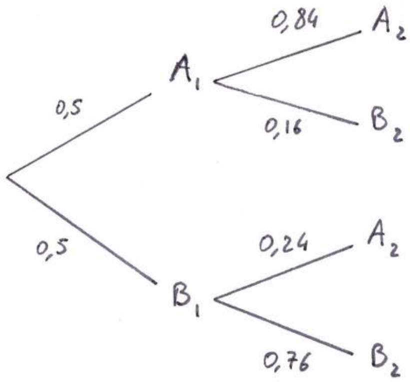
Ex 1 :

1)



2) a) $\boxed{a_2 = P(A_2)}$

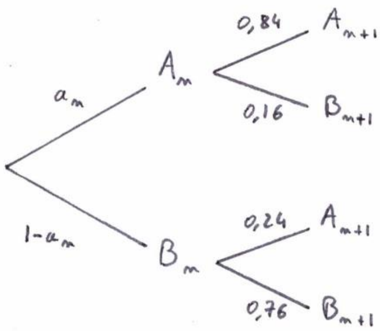
$\{A_1 \,;\, B_1\}$ forme une partition de l'univers (système complet d'événements)

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}84 + 0{,}5 \times 0{,}24 \\ &= 0{,}42 + 0{,}12 \\ &= \boxed{0{,}54} \end{aligned}$$

b) $P_{A_2}(B_1) = \dfrac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}54} = \dfrac{12}{54} = \dfrac{2}{9}$ $\boxed{\simeq 0{,}222}$ (à 10^{-3} près)

3) a)



b) $\{A_n ; B_n\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$$
$$= a_n \times 0{,}84 + (1-a_n) \times 0{,}24$$
$$= 0{,}84\, a_n + 0{,}24 - 0{,}24\, a_n$$
$$= \boxed{0{,}6\, a_n + 0{,}24}$$

4) Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$

Initialisation : Pour $n = 1$, $0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{1-1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 1 = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5 = a_1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$

et montrons que $a_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n}$

D'après la question 3.b, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}6 \cdot a_n + 0{,}24$$
$$= 0{,}6\left(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}\right) + 0{,}24 \quad \text{d'après HR}$$
$$= 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \times 0{,}6 + 0{,}24$$
$$= 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n} \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion :

$\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}}$$

5) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$

$= 0{,}6 - 0{,}1 \times \frac{1}{0{,}6} \times 0{,}6^n$

$= 0{,}6 - \frac{1}{6} \times 0{,}6^n$

Or on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n = 0$ car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Puis par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{6} \times 0{,}6^n = 0$

Et enfin par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6 + 0 = \boxed{0{,}6}$

Ceci signifie qu'à long terme, la probabilité qu'un vélo de la société pris au hasard soit au point A est de 0,6.

6) On veut $n \in \mathbb{N}$ tq : $a_n \geqslant 0{,}599$

$\Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant 0{,}599$

$\Leftrightarrow 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \leqslant 0{,}6 - 0{,}599$

$\Leftrightarrow 0{,}6^{n-1} \leqslant \frac{0{,}001}{0{,}1}$

$\Leftrightarrow 0{,}6^{n-1} \leqslant 0{,}01$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}6^{n-1}) \leqslant \ln 0{,}01$ Par (stricte) croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow (n-1) \times \ln 0{,}6 \leqslant \ln 0{,}01$

$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$ car $\ln 0{,}6 < 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant 1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$

Or $1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \simeq 10{,}02$ et on veut $n \in \mathbb{N}$ donc il faut $\boxed{n \geqslant 11}$

Ceci signifie qu'il faut attendre au moins le 11ème jour avant que la probabilité qu'un vélo de la société pris au hasard ait une probabilité d'au moins 0,599 de se trouver au point A.

Remarque : On pouvait aussi passer par un programme Python

```python
def seuil():
    n=1
    while 0.6-0.1*(0.6**(n-1)) < 0.599 :
        n=n+1
    return n
```

On obtient dans la console :

```
>>> seuil()
11
```

Ex 2 :

⇒ Partie A : $\forall x \in [-3;4]$, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

1) La fonction p est dérivable sur $[-3;4]$ en tant que fonction polynôme

$\forall x \in [-3;4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times 3\times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$

le polynôme p' n'admet pas de racine, donc il est du signe de son coefficient dominant $3 > 0$

Ainsi, $\forall x \in [-3;4]$, $p'(x) > 0$

Donc $\boxed{p \text{ est strictement croissante sur } [-3;4]}$

2) La fonction p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3;4]$

De plus, on a : $\begin{cases} p(-3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 + 5\times(-3) + 1 = -27 - 27 - 15 + 1 = -68 < 0 \\ p(4) = 4^3 - 3\times 4^2 + 5\times 4 + 1 = 64 - 48 + 20 + 1 = 37 > 0 \end{cases}$

Comme $0 \in [p(-3); p(4)]$, on peut en conclure d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI) que : $\boxed{\exists !\, \alpha \in [-3;4],\ p(\alpha) = 0}$

Rem : Comme $p(-3)\times p(4) < 0$, on pouvait utiliser le corollaire du th. de Bolzano.

3) On procède par balayage :

$p(-1) = -8 < 0$ et $p(0) = 1 > 0$ donc $\alpha \in]-1;0[$

puis $p(-0{,}2) < 0$ et $p(-0{,}1) > 0$ donc $\alpha \in]-0{,}2;-0{,}1[$

puis $p(-0{,}18) < 0$ et $p(-0{,}17) > 0$ donc $\alpha \in]-0{,}18;-0{,}17[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq -0{,}2}$ (à 10^{-1} près)

4) On en déduit le tableau de signes :

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

car p strict croissante sur $[-3;4]$ et $p(\alpha)=0$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall x \in [-3;4]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

1) ⓐ f est dérivable sur $[-3;4]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[-3;4]$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-3;4]$

$$\forall x \in [-3;4], \quad f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}}$$

ⓑ On a $f'(1) = \dfrac{e^1 \times (1-1)^2}{(1+1^2)^2} = \dfrac{e \times 0}{4} = 0$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse } 1}$

2) ⓐ D'après le graphique, il semble que $\mathcal{C}_f$ change deux fois de convexité, approximativement en 0 et en 1.

Ainsi, le profil semble bien posséder 2 points d'inflexion,

$\boxed{\text{ce qui répond au critère pour assurer de bonnes sensations.}}$

ⓑ On admet que : $\forall x \in [-3;4]$, $f''(x) = \dfrac{p(x) \times (x-1) \times e^x}{(1+x^2)^3}$

On a : $\forall x \in [-3;4]$, $1+x^2 > 0 \Rightarrow (1+x^2)^3 > 0$

et $\forall x \in [-3;4]$, $e^x > 0$

Donc le signe de f'' dépend uniquement de celui de $p(x)$ et de $x-1$

$x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$ et le signe de p est donné à la question A.4)

D'où le tableau de signes :

x	-3		α		1		4
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

pts d'inflexion

$\mathcal{C}_f$ admet bien deux points d'inflexion (en $\alpha \simeq -0{,}2$ et en 1), ce qui nous permet de conclure d'après le critère énoncé que

$\boxed{\text{le toboggan assure de bonnes sensations.}}$

Ex 3 :

1) ⓐ Dans le R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $A\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$; $R\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$

Donc $\vec{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

Puis $\begin{cases} AR = \|\vec{AR}\| = \sqrt{\vec{AR}^2} = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13} \text{ m} \\ AT = \|\vec{AT}\| = \sqrt{\vec{AT}^2} = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13} \text{ m} \end{cases}$

On a $AR = AT$ donc $\boxed{\text{le triangle } ART \text{ est isocèle en } A}$

ⓑ Dans le R.O.N., on a :

$\vec{AR} \cdot \vec{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 0 + 4 = \boxed{4}$

ⓒ On a : $\vec{AR} \cdot \vec{AT} = AR \times AT \times \cos \widehat{RAT}$

$\iff \cos \widehat{RAT} = \dfrac{\vec{AR} \cdot \vec{AT}}{AR \times AT} = \dfrac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \dfrac{4}{13}$

Puis $\widehat{RAT} = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{13}\right) \boxed{\simeq 72{,}1°}$ (à 10^{-1} près) ⚠ Calculatrice en mode "degré"

2) ⓐ Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ ont déjà été calculés

Dans le R.O.N., on calcule :

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = 0 - 6 + 6 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{AR} \\ \vec{n} \cdot \vec{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 0 + 6 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{AT} \end{cases}$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AR}$ et $\vec{AT}$ non colinéaires (le triangle ART est isocèle) directeurs du plan (ART).

Donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (ART).}$

(b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ART), donc (ART) a une équation cartésienne de la forme : $2x-2y+3z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$

Puis $T\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\in(ART)$ donc $2x_T-2y_T+3z_T+d=0$

$$\iff 2\times3-2\times0+3\times4+d=0$$
$$\iff 6-0+12+d=0$$
$$\iff d=-18$$

Ainsi, (ART) a pour équation : $\boxed{2x-2y+3z-18=0}$

3) (a) $\Delta\perp(ART)$ donc elle admet pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ qui est normal à (ART). De plus, $S\begin{pmatrix}3\\5/2\\0\end{pmatrix}\in\Delta$

D'où $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Delta \iff \overrightarrow{SM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$$\iff \exists k\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{SM}=k\vec{n}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x-3\\y-\frac{5}{2}\\z-0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases}x-3=2k\\y-\frac{5}{2}=-2k\\z=3k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases}x=3+2k\\y=\frac{5}{2}-2k\\z=3k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}}$$

(b) On a $\Delta\perp(ART)$, donc $\Delta\cap(ART)$ est un point, noté L

Puis les coordonnées de L vérifient la représentation paramétrique de Δ et l'équation cartésienne de (ART).

Comme les coordonnées de L sont données dans l'énoncé, on pourrait se contenter de vérifier que $L \in \Delta$ <u>et</u> $L \in (ART)$.

Toutefois, nous allons déterminer les coordonnées de L par nous-même.

$$L \in \Delta \cap (ART) \iff \begin{cases} 2x_L - 2y_L + 3z_L - 18 = 0 \\ x_L = 3 + 2k_L \\ y_L = \frac{5}{2} - 2k_L \\ z_L = 3k_L \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(3 + 2k_L) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k_L\right) + 3 \times 3k_L - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 4k_L - 5 + 4k_L + 9k_L = 18$$

$$\Rightarrow 17k_L = 18 - 1$$

$$\Rightarrow 17k_L = 17$$

$$\Rightarrow k_L = 1$$

Puis $\begin{cases} x_L = 3 + 2k_L = 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5 \\ y_L = \frac{5}{2} - 2k_L = \frac{5}{2} - 2 \times 1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \\ z_L = 3k_L = 3 \times 1 = 3 \end{cases}$ D'où $\boxed{L\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}}$

4) a) Il existe plusieurs façons de répondre à cette question.

On a $D\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} 0 \\ 8-4t \\ 4t \end{pmatrix}$ avec $t \in [0;1]$

Puis $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$ qui sont colinéaires car $\overrightarrow{DN} = k.\overrightarrow{DK}$

Donc $N \in (DK)$

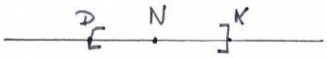
Puis $t \in [0;1] \iff 0 \leqslant t \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 4t \leqslant 4 \iff z_D \leqslant z_N \leqslant z_K$

et $t \in [0;1] \iff 0 \leqslant t \leqslant 1 \iff -4 \leqslant -4t \leqslant 0 \iff 4 \leqslant 8 - 4t \leqslant 8 \iff y_K \leqslant y_N \leqslant y_D$

Ainsi $\boxed{N \in [DK]}$

(ou) Après avoir montré que $N \in (DK)$, on peut visualiser que : $N \in [DK] \Leftrightarrow \overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{ND} \leqslant 0$

Sinon, $N \in (DK) \setminus [DK]$



On a $\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4+4t \\ 4-4t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N., $\overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{ND} = 0 \times 0 + 4t(-4+4t) - 4t(4-4t) = -32t + 32t^2 = 32t(t-1)$

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{ND}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{t \in [0;1] \Rightarrow N \in [DK]}$

(ou) $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige (DK) et $D\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \in (DK)$ donc $(DK) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 - 4t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On $\begin{cases} D \text{ est le pt de } (DK) \text{ de paramètre } t_D = 0 \\ K \text{ est le pt de } (DK) \text{ de paramètre } t_K = 1 \end{cases}$

Donc $[DK] : \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 - 4t \\ z = 4t \end{cases}, t \in [t_D ; t_K] \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 8 - 4t \\ z = 4t \end{cases}, t \in [0;1]}$

(b) On a $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} x_N - 3 \\ y_N - \frac{5}{2} \\ z_N \end{pmatrix}$

On veut $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \Leftrightarrow 2(x_N - 3) - 2\left(y_N - \frac{5}{2}\right) + 3z_N = 0$

$\Leftrightarrow 2x_N - 6 - 2y_N + 5 + 3z_N = 0$

$\Leftrightarrow 2x_N - 2y_N + 3z_N - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \times 0 - 2(8 - 4t_N) + 3 \times 4t_N - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 0 - 16 + 8t_N + 12t_N - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 20t_N = 17$

$\Leftrightarrow t_N = \frac{17}{20}$

D'où $\begin{cases} x_N = 0 \\ y_N = 8 - 4t_N = 8 - 4 \times \frac{17}{20} = 8 - \frac{17}{5} = \frac{23}{5} \\ z_N = 4t_N = 4 \times \frac{17}{20} = \frac{17}{5} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{N\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{23}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}}$

Ex 4:

$\boxed{1)\ D}$

$a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\frac{1}{9} = \cancel{\ln(9)} + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \cancel{\ln(9)}$

$= \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3)$

$= -\frac{1}{2}\ln(3)$

$\boxed{2)\ C}$

$(E) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$ et $x > 0$ et $x - 10 > 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(x(x-10)\right) = \ln(3 \times 7)$ et $x > 0$ et $x > 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x = 21$ et $x > 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 21 = 0$ et $x > 10$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 100 + 84 = 184 > 0$

Puis $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-10) - \sqrt{184}}{2 \times 1} = \dfrac{10 - 2\sqrt{46}}{2} = 5 - \sqrt{46} < 0 \\ x_2 = \dfrac{-(-10) + \sqrt{184}}{2 \times 1} = \dfrac{10 + 2\sqrt{46}}{2} = 5 + \sqrt{46} > 0 \end{cases}$

On ne peut pas retenir x_1 car on veut $x > 10$

D'où $\mathcal{S} = \{5 + \sqrt{46}\}$

$\boxed{3)\ D}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2(-1 + \ln x)$

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x(-1 + \ln x) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x\ln x + x = -x + 2x\ln x$

$= x(-1 + 2\ln x)$

$\to$ Donc réponse A est fausse

f' est du signe de $-1+2\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Puis $-1+2\ln x \geqslant 0 \iff 2\ln x \geqslant 1 \iff \ln x \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{1/2} \iff x \geqslant \sqrt{e}$

Donc f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui écarte la réponse B.

On vient de voir que $f'(\sqrt{e}) = 0$, ce qui écarte la réponse C.

Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet au pt d'abscisse $\sqrt{e}$ une tangente horizontale d'équation

$y = f(\sqrt{e}) \iff y = (\sqrt{e})^2 \times (-1 + \ln\sqrt{e}) \iff y = e\left(-1+\frac{1}{2}\ln e\right) \iff y = e\left(-1+\frac{1}{2}\right)$
$\iff y = -\frac{1}{2}e$

$\boxed{4)\ B}$

$X \sim \mathcal{B}\left(5\,;\,\frac{2}{5}\right)$ car il y a 20 jetons jaunes parmi $20+30=50$ jetons

Puis $P(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}3456 \simeq 0{,}346$

$\boxed{5)\ D}$

On a toujours $X \sim \mathcal{B}\left(5\,;\,\frac{2}{5}\right)$

Puis $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0} \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \simeq 0{,}922$

$\boxed{6)\ C}$

On a toujours $X \sim \mathcal{B}\left(5\,;\,\frac{2}{5}\right)$

Puis $E(X) = n \times p = 5 \times \frac{2}{5} = 2$