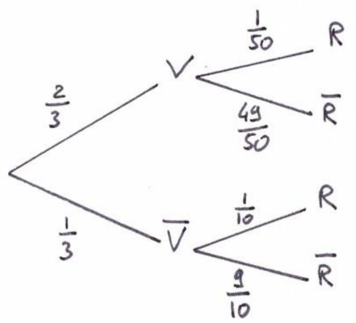
Ex1 :

1) a)



b) $\{V ; \overline{V}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\overline{V} \cap R) = P(V) \times P_V(R) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(R)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{2}{150} + \frac{1}{30}$$

$$= \frac{2}{150} + \frac{5}{150}$$

$$= \boxed{\frac{7}{150}}$$

c) $P_R(V) = \dfrac{P(V \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \dfrac{2}{\cancel{150}} \times \dfrac{\cancel{150}}{7} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$

2) a) On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès " Paul prend son vélo " est égale à $p = P(V) = \frac{2}{3}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(20 ; \frac{2}{3}\right)}$$

b) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \times p^{10} \times (1-p)^{20-10} = 184\,756 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 184\,756 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{10}$

D'où $\boxed{P(X = 10) \simeq 0,054}$ (à 10^{-3} près)

c) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) \simeq 1 - 0{,}038$

$\boxed{\simeq 0{,}962}$ (à 10^{-3} près)

On a utilisé la fonction de répartition de la calculatrice.

d) $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \simeq 13$ (à l'unité près)

En moyenne, sur 20 jours, Paul prend son vélo $\boxed{13 \text{ jours.}}$

3) $E(T) = \sum_k x_k \cdot P(T = x_k)$

$= 10 \times 0{,}14 + 11 \times 0{,}13 + 12 \times 0{,}13 + 13 \times 0{,}12 + 14 \times 0{,}12 + 15 \times 0{,}11 + 16 \times 0{,}1 + 17 \times 0{,}08 + 18 \times 0{,}07$

$= \boxed{13{,}5}$

Pour se rendre à la gare en voiture, Paul mettra en moyenne 13 minutes et 30 secondes.

Ex 2 :

Soit (T_n) : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0{,}955.T_n + 0{,}9$

1) ⓐ Démontrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n \geqslant 20$ et montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$

On a $\underset{HR}{T_n \geqslant 20} \Rightarrow 0{,}955\,T_n \geqslant 0{,}955 \times 20 \Rightarrow 0{,}955\,T_n \geqslant 19{,}1$

$\Rightarrow 0{,}955\,T_n + 0{,}9 \geqslant 19{,}1 + 0{,}9$

$\Rightarrow T_{n+1} \geqslant 20$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = 0{,}955.T_n + 0{,}9 - T_n$

$= (0{,}955 - 1)\,T_n + 0{,}9$

$= -0{,}045.T_n + 0{,}9$

$= -0{,}045.T_n + 0{,}045 \times 20$

$= \boxed{-0{,}045\,(T_n - 20)}$

Or d'après la question précédente,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20 \Leftrightarrow T_n - 20 \geqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}045(T_n - 20) \leqslant 0 \Leftrightarrow T_{n+1} - T_n \leqslant 0$

D'où $\boxed{(T_n) \text{ décroissante sur } \mathbb{N}}$

ⓒ On a (T_n) décroissante et minorée (par 20), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(T_n) \text{ converge}}$ vers une limite réelle $\ell \geqslant 20$

2) Soit (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0{,}955\, T_n + 0{,}9 - 20 = 0{,}955\, T_n - 19{,}1$

$\iff u_{n+1} = 0{,}955\, T_n - 0{,}955 \times 20 = 0{,}955\,(T_n - 20) = 0{,}955 \cdot u_n$

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}955}$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$

ⓑ D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot q^n = 160 \times 0{,}955^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20 \iff T_n = 20 + u_n = \boxed{20 + 160 \times 0{,}955^n}$

ⓒ On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}955^n = 0^+$ car $0 \leqslant 0{,}955 < 1$ (ou $-1 < 0{,}955 < 1$ si on ne précise pas $0^{(+)}$)

puis par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 160 \times 0{,}955^n = 0^+$

et par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 20 + 0^+ = \boxed{20}$

ⓓ $T_n \leqslant 120 \iff 20 + 160 \times 0{,}955^n \leqslant 120$

$\iff 160 \times 0{,}955^n \leqslant 100$

$\iff 0{,}955^n \leqslant \dfrac{100}{160}$

$\iff 0{,}955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$ Par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(0{,}955^n) \leqslant \ln \dfrac{5}{8}$

$\iff n \cdot \ln 0{,}955 \leqslant \ln 0{,}625$ car $\ln 0{,}955 < 0$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}625}{\ln 0{,}955}$

Or $\dfrac{\ln 0{,}625}{\ln 0{,}955} \simeq 10{,}2$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

donc $\boxed{\mathcal{S} = [11 ; +\infty[\cap \mathbb{N}}$ ou $\boxed{\mathcal{S} = \{ n \geqslant 11 ,\ n \in \mathbb{N} \}}$

⚠ L'écriture $[\![11 ; +\infty [\![$ n'est pas autorisée (pas de borne ouverte avec des intervalles d'entiers)

3) ⓐ En sortant du four, le centre du gâteau est plus chaud que l'air ambiant.

Le centre du gâteau va ainsi perdre de la chaleur jusqu'à atteindre celle de l'air ambiant (20°C) sans jamais passer en dessous. Par ailleurs, sa masse étant négligeable par rapport à son environnement, cette perte de température n'aura aucun effet à long terme sur la température de l'air ambiant.

ⓑ La fct "temp" renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $T \leqslant x$, avec x saisi en argument par l'utilisateur.

En exécutant "temp(120)", on obtient $n = 11$ en s'appuyant sur la résolution de l'inéquation $T_n \leqslant 120$ effectuant à la question 2.d

Dans le contexte de l'exercice, ceci signifie qu'il faut attendre 11 minutes pour que la température du centre du gâteau passe sous les 120°C.

Ex 3 :

1) ⓐ Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $J\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{JL} = -1\times(-4)+2\times(-2)+0\times(-3) = 4-4+0 = 0$ donc $\overrightarrow{JK}\perp\overrightarrow{JL}$

Ainsi, $(JK)\perp(JL)$ et $\boxed{\text{le triangle } JKL \text{ est rectangle en } J}$

Rem: les nostalgiques pourraient utiliser la réciproque du th. de Pythagore après avoir calculé les normes des 3 vecteurs (mais c'était plus long ...)

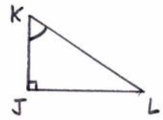
ⓑ Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{\overrightarrow{JK}^2} = \sqrt{(-1)^2+2^2+0^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ cm} \\ JL = \|\overrightarrow{JL}\| = \sqrt{\overrightarrow{JL}^2} = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29} \text{ cm} \end{cases}$$

Puis comme JKL est rectangle en J, on a :

$$\mathcal{A}_{JKL} = \frac{1}{2} JK\times JL = \frac{1}{2}\sqrt{5}\times\sqrt{29} = \boxed{\frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2} \quad (\text{car } 1 \text{ u.l.} = 1 \text{ cm})$$

ⓒ Dans le triangle JKL rectangle en J, on a :



$$\tan\widehat{JKL} = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{29}{5}}$$

Donc $\widehat{JKL} = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{29}{5}}\right) \boxed{\simeq 67,5°}$ (à 10^{-1} près)

⚠ Ne pas oublier de passer la calculatrice en mode "degré"

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{JK} = 6\times(-1)+3\times2+(-10)\times0 = -6+6+0 = 0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{JK} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{JL} = 6\times(-4)+3\times(-2)+(-10)\times(-3) = -24-6+30 = 0 \text{ donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{JL} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ non colinéaires ($\mathcal{A}_{JKL}\neq0$) qui dirigent le plan (JKL). D'où $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (JKL)}$

(b) $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$ normal à (JKL) donc ce plan a une éq. cartésienne de la forme :

$6x+3y-10z+d=0\ ,\ d\in\mathbb{R}$

Puis $J\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\in(JKL) \Leftrightarrow 6x_J+3y_J-10z_J+d=0 \Leftrightarrow 6\times2+3\times0-10\times1+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

D'où (JKL) : $\boxed{6x+3y-10z-2=0}$

3) (a) $\Delta\perp(JKL)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$ dirige Δ, et $T\begin{pmatrix}10\\9\\-6\end{pmatrix}\in\Delta$, d'où une représentation

paramétrique de Δ : $\boxed{\begin{cases}x=10+6t\\y=9+3t\\z=-6-10t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$

⚠ Ne pas oublier

(b) H projeté orth. de T sur (JKL), donc $(HT)=\Delta$, d'où $H\in(\Delta\cap(JKL))$

$$\begin{cases}6x_H+3y_H-10z_H-2=0\\x_H=10+6t_H\\y_H=9+3t_H\\z_H=-6-10t_H\end{cases}$$

$\Rightarrow 6(10+6t_H)+3(9+3t_H)-10(-6-10t_H)-2=0$

$\Rightarrow 60+36t_H+27+9t_H+60+100t_H-2=0$

$\Rightarrow 145t_H+145=0$

$\Rightarrow t_H=-1$

Puis $\begin{cases}x_H=10+6t_H=10+6\times(-1)=10-6=4\\y_H=9+3t_H=9+3\times(-1)=9-3=6\\z_H=-6-10t_H=-6-10\times(-1)=-6+10=4\end{cases}$ Ainsi $\boxed{H\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}}$

(c) Comme H est le projeté orthogonal de T sur (JKL),

(HT) est la hauteur du tétraèdre JKLT relative à la base JKL triangle

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{HT}\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$ puis $HT=\sqrt{\overrightarrow{HT}^2}=\sqrt{6^2+3^2+(-10)^2}=\sqrt{36+9+100}=\sqrt{145}$ cm

Puis $V_{JKLT}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{JKL}\times HT=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145}=\boxed{\frac{145}{6}\text{ cm}^3}$

Ex 4 :

$\boxed{\text{1) VRAI}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1-\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{\cancel{1}+e^x \cancel{-1}+e^x}{1+e^x} = \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{2}{e^{-x}+e^0} = \frac{2}{e^{-x}+1}$$

$\boxed{\text{2) VRAI}}$

$$g(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{2} \underset{e^x+1\neq 0}{\overset{\text{car } \forall x\in\mathbb{R},}{\Leftrightarrow}} 2e^x = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x=0$$

Rem : On pouvait également utiliser le théorème de la bijection en remarquant que g est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

Puis $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \frac{0^+}{0^++1} = 0^+$

et $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{1+0^+} = 1$

Donc $f(\mathbb{R}) =]0\,;1[$ et $\frac{1}{2}\in f(\mathbb{R})$, donc $\exists!\, \alpha\in\mathbb{R},\ g(\alpha)=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{3) VRAI}}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = x^2e^{-x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = 2x.e^{-x} + x^2\times(-e^{-x}) = (2x-x^2).e^{-x} = x(2-x).e^{-x}$

La tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ en $a\in\mathbb{R}$ a pour eq : $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$

Or l'axe des abscisses d'eq. $y=0$ est tangent à $\mathcal{C}_f$ en a ssi $\begin{cases} f'(a)=0 \\ f(a)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2-a).e^{-a}=0 \\ a^2e^{-a}=0 \end{cases} \underset{e^{-a}\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a(2-a)=0 \\ a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ ou } a=2 \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=0$$

Rem : en $a=2$, on a $f'(a)=0$ donc tangente horizontale, mais $f(a)\neq 0$ donc la tangente a pour eq : $y=f(a) \Leftrightarrow y=f(2) \Leftrightarrow y=4e^{-2}$

$\boxed{4)\ \text{FAUX}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = e^x(1-x^2)$, h dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^x(1-x^2) + e^x \times (-2x) = (1-x^2-2x)e^x$, h' dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit

$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = (-2x-2)e^x + (1-x^2-2x)e^x = (-x^2-4x-1)e^x$

comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, h'' est du signe du trinôme $-x^2-4x-1$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = (-4)^2 - 4\times(-1)\times(-1) = 16-4 = 12 > 0$ puis $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4-\sqrt{12}}{-2} = -2+\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{4+\sqrt{12}}{-2} = -2-\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
h	concave	Inflex	convexe	Inflex	concave

coeff dominant négatif

← Deux points d'inflexion

$\boxed{5)\ \text{FAUX}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{e^x}{e^x+x} = \dfrac{e^x}{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{x}{e^x}}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (th. croissances comparées) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{x}{e^x}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

$\boxed{6)\ \text{VRAI}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $1+e^{2x} \geqslant 2e^x \iff 1+e^{2x}-2e^x \geqslant 0$

$\iff (e^x)^2 - 2e^x \times 1 + 1^2 \geqslant 0$

$\iff (e^x-1)^2 \geqslant 0$ Ceci est toujours vrai