Ex 1 :

1) b

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas géométriques car elles sont la somme et la différence d'une suite géométriques $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ et d'une constante.

Puis (u_n) est majorée par 1 et nous n'avons aucune information sur les variations de (w_n). Ceci exclut les réponses a ; c et d

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq w_n \leq v_n$, d'après le th. des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

2) c

La fonction $f : x \longmapsto x.e^{(x^2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times e^{(x^2)} + x \times 2x.e^{(x^2)} = (1 + 2x^2)\, e^{(x^2)}$

Rem : L'énoncé est mal formulé et prête à confusion.

Sans parenthèses dans l'expression de f, il n'est pas possible de distinguer clairement l'expression entre $x.e^{(x^2)}$ et $x\left(e^x\right)^2$

L'écriture a^{b^c} n'est en effet pas correcte car en général, $\left(a^b\right)^c \neq a^{\left(b^c\right)}$

Par exemple, $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$ et $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$

Bien qu'il n'y ait aucune règle de priorité opératoire valable sans parenthèse, on considérera toujours qu'il s'agit de $a^{\left(b^c\right)}$.

On retrouve par exemple un problème similaire dans l'écriture : $E \cap F \cup G$ pour laquelle il n'y a par contre aucun consensus possible.

Dans le cadre de notre exercice, si on considérait que $f(x) = x.\left(e^x\right)^2 = x.e^{2x}$, on obtenait la réponse b qui aurait certainement aussi été accepté au baccalauréat.

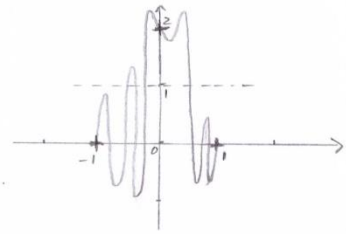
$\boxed{3) \text{ c}}$ On considère la limite d'une fonction rationnelle à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

ou $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{2-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{4) \text{ c}}$ Par application du TVI (Théorème des Valeurs Intermédiaires)

L'exemple ci-contre exclut les réponses a ; b et d



$\boxed{5) \text{ c}}$ Attention, il s'agit du graphe de g', pas de g

g' admet un maximum en -2, pas g. Il s'agit en fait d'un point d'inflexion pour g, ce qui exclut la réponse a

$g' \leqslant 0$ sur $[1;2]$, donc g est décroissante sur $[1;2]$, excluant la réponse b

g' est croissante (strictement) sur $[1;2]$, donc g est bien convexe sur $[1;2]$

$g'(0)=0$ et g' change de signe autour de $x=0$ (positif vers négatif), donc g admet un maximum (et non un minimum) en 0, excluant la réponse d

Ex2 :

1) a) Dans le R.O.N. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $\boxed{I\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) On a alors $\boxed{\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ car $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 2 \times \frac{-1}{2} + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{DJ} \perp \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \quad \text{donc } \overrightarrow{DJ} \perp \overrightarrow{BG} \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ non colinéaires qui dirigent le plan (BGI). Donc $\boxed{\overrightarrow{DJ} \text{ est normal au plan } (BGI).}$

Pour rappel, il s'agit d'une conséquence vectorielle du "théorème de la porte".

d) $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (BGI) \iff \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\iff 2(x-1) + (-1) \times (y-0) + 1 \times (z-0) = 0$$

$$\iff \boxed{2x - y + z - 2 = 0}$$

2) a) d passe par $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et est orthogonale à (BGI), donc dirigée par $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est normal à (BGI). Ainsi :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

⑥ Soit $L\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$ On a $d \perp (BGI)$ donc d et (BGI) ont un unique point d'intersection. Vérifions alors que $L \in d$ et $L \in (BGI)$

* Appartenance de L à d : On recherche t_L

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1+2t \\ \frac{1}{6} = -t \\ \frac{5}{6} = 1+t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = \frac{2}{3}-1 \\ t = -\frac{1}{6} \\ t = \frac{5}{6}-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{6} \\ t = -\frac{1}{6} \\ t = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

compatibles, donc $L \in d$ et $t_L = -\frac{1}{6}$

* Appartenance de L à (BGI) :

$$2x_L - y_L + z_L - 2 = 2 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{6} - 2 = \frac{6}{3} - 2 = 0$$ donc $L \in (BGI)$

* Conclusion : On a bien $\boxed{d \cap (BGI) = \left\{ L\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix} \right\}}$

<u>Rem:</u> On pouvait également ne pas tenir compte des renseignements donnés sur L et calculer les coordonnées du point d'intersection de d et de (BGI) pour ensuite constater qu'il s'agit bien du point L de l'énoncé :

$$d \cap (BGI) : \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0$

$\Rightarrow \cancel{2} + 4t + t + 1 + t \cancel{-2} = 0$

$\Rightarrow 6t = 1$

$\Rightarrow t = \frac{-1}{6}$

Puis $$\begin{cases} x = 1+2t = 1 + 2 \times \frac{-1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = -t = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} \\ z = 1+t = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

D'où $\boxed{d \cap (BGI) = \{L\}}$

3) ⓐ $\mathcal{V}_{FBGI} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FBG} \times FI = \frac{1}{3} \times \frac{FG \times FB}{2} \times \frac{1}{2} FE = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{12}}$ u.v.

ⓑ D'après les questions précédentes, on a :

$\begin{cases} d \perp (BGI) \\ d \cap (BGI) = L \end{cases}$ $\Rightarrow$ [FL] est la hauteur de la pyramide FBGI si on prend le triangle BGI pour base.

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$ car $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$

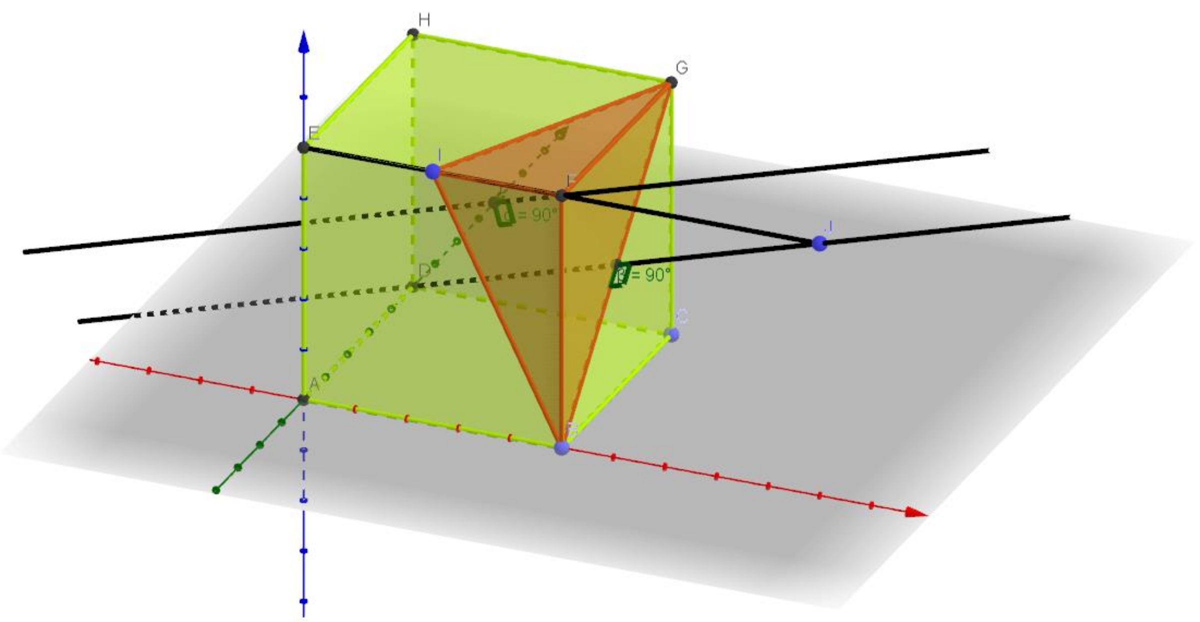
D'où $FL = \|\overrightarrow{FL}\| = \sqrt{\overrightarrow{FL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}}$

$\Leftrightarrow FL = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Enfin, $\mathcal{V}_{FBGI} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BGI} \times FL$

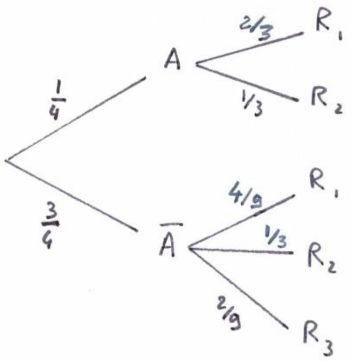
$\Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BGI} \times \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{BGI} = \frac{3 \times \cancel{6}^{1}}{\cancel{12}_{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$ u.a.



Ex 3 :

1)



Rem : Simplifier les calculs !!!

$\frac{75}{300} = \frac{3 \times \cancel{25}}{12 \times \cancel{25}} = \frac{1}{4}$

$\frac{225}{300} = \frac{9 \times \cancel{25}}{12 \times \cancel{25}} = \frac{3}{4}$

$\frac{50}{75} = \frac{2 \times 25}{3 \times 25} = \frac{2}{3}$

$\frac{100}{225} = \frac{4 \times \cancel{25}}{9 \times \cancel{25}} = \frac{4}{9}$

$\frac{75}{225} = \frac{3 \times \cancel{25}}{9 \times \cancel{25}} = \frac{1}{3}$

$\frac{50}{225} = \frac{2 \times \cancel{25}}{9 \times \cancel{25}} = \frac{2}{9}$

2) ⓐ $P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

ⓑ $\{A ; \bar{A}\}$ forme un système complet d'événements

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P(\bar{A} \cap R_2) = \frac{1}{12} + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R_2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$\iff P(R_2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

ⓒ $P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times 3 = \boxed{\frac{1}{4}}$

3) ⓐ D'après l'énoncé, on a :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

On a déjà calculé $P(R_2) = \frac{1}{3}$

Puis d'après l'arbre pondéré, $P(R_3) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R_3) = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1}{6}$

Enfin, on a $P(R_1) = 1 - P(R_2) - P(R_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

D'où la loi de probabilité de X :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

ⓑ On calcule : $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{3}} \simeq 1,67$

Ceci signifie qu'il faut en moyenne environ 1,67 passages pour réussir l'examen.

4) ⓐ On a $P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P(\overline{R_3}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de candidats ayant réussi l'examen à la 3ᵉ tentative. On répète n fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le candidat réussit à la 3ᵉ tentative" est $p = P(R_3) = \frac{1}{6}$

Donc $Y \sim \mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{6}\right)$ avec $n \in [\![1 ; 300]\!]$

Puis $P(Y=0) = \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Enfin, $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

On peut donc considérer l'évènement :

"Au moins un candidat à réussi l'examen à la 3ᵉ tentative"

<u>Rem:</u> Il y avait d'autres façons de rédiger la réponse, sans utiliser la loi binomiale.

(b) On veut : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 1-0{,}9$

$$\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}1$$

$$\iff \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln(0{,}1)$$

$$\iff n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0{,}1)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

car $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

On a $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 12{,}6$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc le programme renvoie la valeur $\boxed{13}$

Ainsi, il faut choisir au moins 13 personnes (parmi les 300 candidats) pour que la probabilité qu'au moins un ait réussi à la 3e tentative soit strictement supérieure à 0,9.

```python
def seuil(p):
    n=1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(0.9)
13
```

Ex A :

→ Partie I

1) $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ est le coeff. directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A\begin{pmatrix} 1/e \\ e \end{pmatrix}$

Il s'agit d'une tangente horizontale, donc $\boxed{f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0}$

$f'(1)$ est le coeff. directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Comme la tangente T_B coupe l'axe des abscisses en $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{2-0} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

2) Comme T_B coupe l'axe des ordonnées en $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, son ordonnée à l'origine vaut 3. D'où T_B : $\boxed{y = -x + 3}$

→ Partie II $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{2 + \ln x}{x}$

1)

$$f(x_A) = f\left(\frac{1}{e}\right) = f(e^{-1}) = \frac{2 + \ln(e^{-1})}{e^{-1}} = e\,(2 + (-1)) = e = y_A \quad \text{donc } \boxed{A \in \mathcal{C}_f}$$

$$f(x_B) = f(1) = \frac{2 + \ln 1}{1} = 2 + 0 = 2 = y_B \quad \text{donc } \boxed{B \in \mathcal{C}_f}$$

Puis $f(x) = 0 \iff \dfrac{2 + \ln x}{x} = 0 \iff 2 + \ln x = 0$ et $x \neq 0$ et $x > 0$

$\iff \ln x = -2$ et $x > 0$

$\iff x = e^{-2}$ et $x > 0$

$\iff x = e^{-2}$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \cap (O;\vec{\imath}) = \left\{ I\begin{pmatrix} e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

2) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$ puis par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + \ln x = -\infty$

$\Rightarrow$ Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \times (2 + \ln x) = \boxed{-\infty}$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{2 + \ln x}{x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+ \text{ (th. croissances comparées)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (2 + \ln x)}{x^2} = \dfrac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{-1 - \ln x}{x^2}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$ donc f' est du signe de $-1 - \ln x$

Puis $-1 - \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant -1$

$\iff x \leqslant e^{-1}$ et $x > 0$

$\iff x \in \left]0 ; e^{-1}\right]$

D'où le tableau de variations :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0^+

D'après II.1), $f(e^{-1}) = e$

5) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^3}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$, donc f'' est du signe de $1+2\ln x$

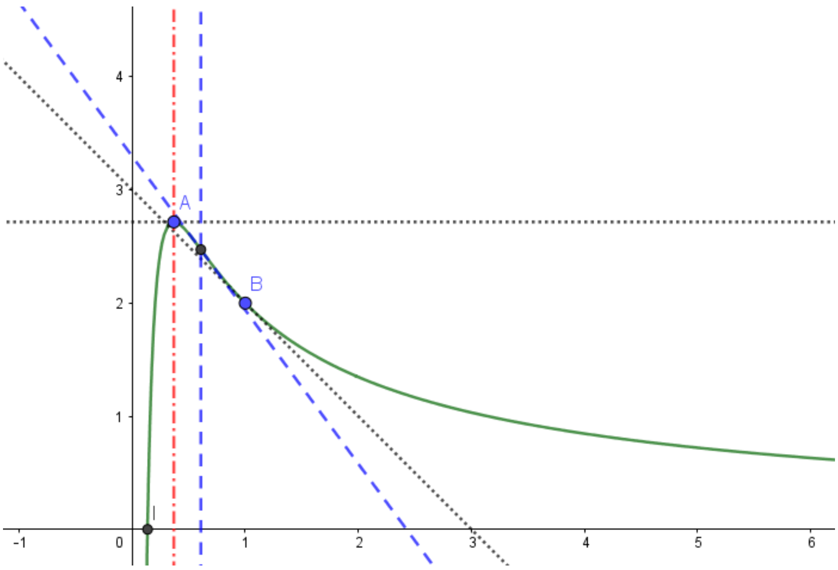
Puis $1+2\ln x \geqslant 0 \iff 2\ln x \geqslant -1$

$\iff \ln x \geqslant \dfrac{-1}{2}$

$\iff x \geqslant e^{-\frac{1}{2}}$ et $x > 0$

$\iff x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Donc le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est : $\boxed{\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}} ; +\infty\right[}$



Ex B :

1) a) $f(0)$ est la T° de la baguette à la sortie du four, donc $\boxed{f(0) = 225}$

b) $y' + 6y = 150 \iff y' = -6y + 150$ (E)

$f_0(t) = \frac{-150}{-6} \iff f_0(t) = 25$ est sol. particulière de (E)

Puis (E) admet pour sol : $\boxed{f_\lambda(t) = \lambda e^{-6t} + 25 \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

c) On veut $f_\lambda(0) = 225 \iff \lambda e^{-6\times 0} + 25 = 225$

$\iff \lambda . e^0 = 200$

$\iff \lambda = 200$

D'où $\boxed{f(t) = 200 e^{-6t} + 25}$

2) Vérifions que f est décroissante et que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = -6 \times 200 \times e^{-6t} = -1200 e^{-6t} < 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-6t} > 0$

Donc f est bien décroissante (strictement)

Puis $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t} = 0^+$ donc par produit $\lim\limits_{t \to +\infty} 200 . e^{-6t} = 0^+$

Et par somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 200 . e^{-6t} + 25 = 25$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ fournit donc bien un modèle en accord avec les observations.}}$

3) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Par ailleurs, $f(0) = 225$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$ donc $f(\mathbb{R}_+) = [25 ; 225]$

Comme $40 \in [25 ; 225]$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{\text{l'équation } f(t) = 40 \text{ possède une unique solution sur } \mathbb{R}_+}$

4) Par lecture graphique, $T_0 \approx 0{,}43 \text{ h} \simeq 0{,}43 \times 60 \text{ min} \simeq \boxed{26 \text{ minutes}}$

Rem : La notation T_0 pour représenter un temps est ici mal choisie car elle fait plutôt penser à une température.

5) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$

D'où $D_0 = f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) = 200 . e^{-6 \times 0} + 25 - \left(200 . e^{-6 \times \frac{1}{60}} + 25\right)$

$\Leftrightarrow D_0 = 200 - 200 . e^{-0,1} \boxed{\simeq 19{,}0 \quad (\text{à } 10^{-1} \text{ près})}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$

$$= 200 . e^{-6 \times \frac{n}{60}} + 25 - \left(200 . e^{-6 . \frac{n+1}{60}} + 25\right)$$

$$= 200 . e^{-0,1n} \cancel{+25} - 200\, e^{-0,1(n+1)} \cancel{-25}$$

$$= 200 . e^{-0,1n} - 200 . e^{-0,1n} . e^{-0,1}$$

$$= \boxed{200 . e^{-0,1n} \left(1 - e^{-0,1}\right)} = D_0 . e^{-0,1n}$$

Pour étudier le sens de variations de (D_n), on pourra étudier le signe de $D_{n+1} - D_n$, ou comparer $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ à 1 en vérifiant que $\forall n \in \mathbb{N}, D_n > 0$, ou alors étudier les variations de la fonction associée sur $\mathbb{R}_+$.

On rappelle qu'il n'est pas concevable de dériver une suite directement.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = 200\, e^{-0{,}1n}\left(1 - e^{-0{,}1}\right) = D_0 \cdot e^{-0{,}1n}$

Ainsi, comme $D_0 \simeq 19$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-0{,}1n} > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n > 0$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{D_{n+1}}{D_n} = \dfrac{\cancel{D_0} \cdot e^{-0{,}1(n+1)}}{\cancel{D_0} \cdot e^{-0{,}1n}} = \dfrac{\cancel{e^{-0{,}1n}} \times e^{-0{,}1}}{\cancel{e^{-0{,}1n}}} = e^{-0{,}1} \simeq 0{,}9 < 1$

Donc $\boxed{(D_n) \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{N}}$

Puis on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0{,}1n} = 0^+$

Donc par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = D_0 \times \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0{,}1n} = \boxed{0^+}$

D'après l'énoncé de la question 2), nous savons que la baguette "tend à se stabiliser à la température ambiante".
Ainsi, la diminution de température (D_n) va tendre vers 0 car la température va baisser vite au début puis de moins en moins vite en se rapprochant de 25°C, jusqu'à ce que la baisse de température devienne (quasiment) nulle.

$\boxed{\text{Le résultat était donc prévisible dans le contexte de l'exercice.}}$

Rem : En voyant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = D_0 \cdot e^{-0{,}1n} = D_0 \cdot \left(e^{-0{,}1}\right)^n$
On pouvait dire que (D_n) est géométrique de premier terme $D_0 > 0$ et de raison $q = e^{-0{,}1} \simeq 0{,}9$ (donc $|q| < 1$)
La conclusion sur les variations et la limite était alors évidente.