Ex1 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,95\, u_n + 200 \qquad$ et $\quad u_0 = 10\,000$

1) $u_1 = 0,95 . u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9500 + 200 = \boxed{9700}$

$u_2 = 0,95 . u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9215 + 200 = \boxed{9415}$

2) (a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 4000 \qquad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 10\,000 > 4000 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 4000$ et mq $u_{n+1} > 4000$

$\underset{\text{HR}}{u_n > 4000} \Rightarrow 0,95 . u_n > 0,95 \times 4000$

$\Rightarrow 0,95 . u_n > 3800$

$\Rightarrow 0,95 . u_n + 200 > 3800 + 200$

$\Rightarrow u_{n+1} > 4000 \qquad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 4000}$

(b) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 4000$

Donc (u_n) est minorée (par 4000)

De plus, d'après l'énoncé, (u_n) est décroissante.

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $l \geqslant 4000$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 4000$

a) $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = \boxed{6000}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 4000$

$$= 0,95\, u_n + 200 - 4000$$
$$= 0,95\, u_n - 3800$$
$$= 0,95\, u_n - 0,95 \times 4000$$
$$= 0,95(u_n - 4000)$$
$$= 0,95 . v_n$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,95}$ et de premier terme $v_0 = 6000$

c) D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = v_0 . q^n \iff v_n = 6000 \times 0,95^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000$

$$\iff \boxed{u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n}$$

d) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$ (limite suite géométrique de raison q tq $|q| < 1$)

Puis par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$

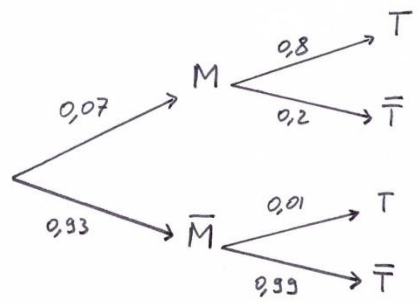
et par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 4000 + 6000 \times 0,95^n = \boxed{4000}$

4) La suite (u_n) modélise exactement le nombre d'individus pour l'année $2020 + n$

Ainsi, le résultat précédent montre qu'à très long terme la population va décroître jusqu'à atteindre 4000 individus, soit moins de la moitié du nombre initial d'individus (10 000). $\boxed{\text{Le responsable de l'association a donc raison.}}$

Ex 2 :

1)



2) a) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \boxed{0,056}$

b) $\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,056 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,056 + 0,93 \times 0,01 \\ &= 0,056 + 0,0093 \\ &= \boxed{0,0653} \end{aligned}$$

3) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} = \dfrac{560}{653} \boxed{\simeq 0,86}$ à 10^{-2} près

4) a) On répète 10 fois de manière identique et indépendante (assimilation à un tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'individu a un test positif" est égale à 0,0653

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,0653

$\boxed{X \sim \mathcal{B}(10 ; 0,0653)}$

b) $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0{,}0653^2 \times (1-0{,}0653)^{10-2}$

$= 45 \times 0{,}0653^2 \times 0{,}9347^8$

$\boxed{\simeq 0{,}11}$ à 10^{-2} près

Rem : On pouvait également utiliser directement le menu probabilité de la calculatrice et entrer les paramètres de la loi binomiale.

5) Si on choisit n personnes, alors $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}0653)$

On veut $P(X \geq 1) > 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0{,}99$

$\Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}01$

$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0{,}0653^0 \times (1-0{,}0653)^{n-0} < 0{,}01$

$\Leftrightarrow 1 \times 1 \times 0{,}9347^n < 0{,}01$

$\Leftrightarrow 0{,}9347^n < 0{,}01$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}9347^n) < \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}9347) < \ln(0{,}01)$

car $\ln(0{,}9347) < 0$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347}$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347} \simeq 68{,}2$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc il faudra tester $\boxed{\text{au moins 69 personnes}}$.

Ex 3 :

1) Dans le R.O.N. $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :

$$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\;;\;D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\;;\;E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\;;\;G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\;\text{ et }\;H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

2) ⓐ On a : $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. :

$$\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{\overrightarrow{EG}^2} = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{DG}\| = \sqrt{\overrightarrow{DG}^2} = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{\overrightarrow{DE}^2} = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle } EGD \text{ est équilatéral}}$

Rem 1 : Il est ici inutile de tester la présence d'angles droits.
Par contre, si EGD avait été isocèle, il aurait fallu tester s'il était ou non isocèle-rectangle (avec Pythagore ou le produit scalaire).

Rem 2 : Sauf cas particulier, il est souvent plus simple de calculer les longueurs des côtés puis, si nécessaire, tester l'orthogonalité.

Rem 3 : On pouvait, de façon très élégante, éviter tous ces calculs en remarquant que [EG], [GD] et [ED] étaient les diagonales de trois faces carrées de côté 1, et que ainsi $EG = GD = ED = 1\times\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Pour rappel, la diagonale d'un | carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$
| cube de côté a mesure $a\sqrt{3}$

ⓑ $$\mathcal{A}_{EGD} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times EG^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}}\times\cancel{2}^{1} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \text{u.a.}$$

3) On a : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BH} \iff \begin{cases} x_M - 1 = -\frac{1}{3} \\ y_M = \frac{1}{3} \\ z_M = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = \frac{2}{3} \\ y_M = \frac{1}{3} \\ z_M = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \boxed{M\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$

4) a) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. :

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = -1\times1 + 1\times1 + 1\times0 = -1+1+0 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EG} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED} = -1\times0 + 1\times1 + 1\times(-1) = 0+1-1 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{ED} \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui dirigent (EGD)

D'où $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } (EGD)}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (EGD) , donc (EGD) a une équation cartésienne de la forme $-x + y + z + d = 0$

Puis $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (EGD) \iff -x_D + y_D + z_D + d = 0$
$\iff -0 + 1 + 0 + d = 0$
$\iff d = -1$

Ainsi, (EGD) a pour équation : $\boxed{-x + y + z - 1 = 0}$

c) $\mathcal{D} \perp (EGD)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$, et $M\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$, donc :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_M - t \\ y = y_M + t \\ z = z_M + t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \iff \boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

5) (a) K est le projeté orthogonal de M sur (EGD)

Or $\mathcal{D} \perp (EGD)$ et $M \in \mathcal{D}$, donc $K \in \mathcal{D}$

Ainsi, $K \in \mathcal{D} \cap (EGD) \iff \begin{cases} -x_K + y_K + z_K - 1 = 0 \\ x_K = \frac{2}{3} - t_K \\ y_K = \frac{1}{3} + t_K \\ z_K = \frac{1}{3} + t_K \end{cases}$

$\Rightarrow -\left(\frac{2}{3} - t_K\right) + \left(\frac{1}{3} + t_K\right) + \left(\frac{1}{3} + t_K\right) - 1 = 0$

$\Rightarrow \cancel{-\frac{2}{3}} + t_K + \cancel{\frac{1}{3}} + t_K + \cancel{\frac{1}{3}} + t_K = 1$

$\Rightarrow 3t_K = 1$

$\Rightarrow t_K = \frac{1}{3}$

Puis $\begin{cases} x_K = \frac{2}{3} - t_K = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y_K = \frac{1}{3} + t_K = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z_K = \frac{1}{3} + t_K = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$ Ainsi on a $\boxed{K\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}$

<u>Rem:</u> Comme les coordonnées de K étaient données dans l'énoncé, on aurait pu se contenter de vérifier que $K \in \mathcal{D}$ et $K \in (EGD)$ à partir des coordonnées fournies.

(b) On a $\mathcal{A}_{EGD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cf question 2.b) et $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. , $KM = \|\overrightarrow{KM}\| = \sqrt{\overrightarrow{KM}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Enfin, $V_{GEDM} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EGD} \times KM = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$ u.v.

Ex A :

⟹ Partie 1 :

1) $f(0) = y_A = \boxed{2}$ ← ordonnée du point A

$f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$ ← coeff. dir. de la tgte à $\mathcal{C}$ en A

2) Comme $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en A, il semble que f soit convexe sur $[x_A ; +\infty[\; = [0 ; +\infty[\; = \boxed{\mathbb{R}_+}$

⟹ Partie 2 :

1) Soit (H) : $y' = -y$

(H) est une équation différentielle homogène du 1er ordre, donc (H) admet pour solutions toutes les fonctions du type : $\boxed{x \longmapsto \lambda . e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}}$

2) Soit (E) : $y' = -y + e^{-x}$

et $g : x \longmapsto x . e^{-x}$ une sol. particulière de (E)

Donc les solutions de (E) sont de la forme : $x \longmapsto \lambda . e^{-x} + g(x), \lambda \in \mathbb{R}$

i.e $x \longmapsto \lambda . e^{-x} + x . e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$

i.e $\boxed{x \longmapsto (\lambda + x) e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}}$

3) On a f sol. de (E) et $f(0) = 2$

Donc $(\lambda + 0) . e^{-0} = 2 \iff \lambda \times 1 = 2 \iff \lambda = 2$

D'où $\boxed{f : x \longmapsto (x+2) . e^{-x}}$

$\Rightarrow$ Partie 3 : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$

1) ⓐ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2)\cdot(-e^{-x}) = \left(1-(x+2)\right)e^{-x} = \boxed{(-x-1)\cdot e^{-x}}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} > 0$ donc f' est du signe de $-x-1$

D'où $f'(x) \geqslant 0 \iff -x-1 \geqslant 0 \iff x \leqslant -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

$f(-1) = (-1+2)\cdot e^{-(-1)} = 1 \times e = e$

2) ⓐ f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1)\times(-e^{-x}) = -e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x} = \boxed{x \cdot e^{-x}}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} > 0$ donc f'' est du signe de x sur $\mathbb{R}$

Ainsi, f est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$

$\boxed{\text{L'affirmation est donc vraie.}}$

Ex B :

$\Rightarrow$ Partie 1 : $\forall x \in [1;4]$, $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$

1) ⓐ f est dérivable sur $[1;4]$ comme somme de fcts dérivables sur $[1;4]$

$\forall x \in [1;4]$, $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \frac{35 - 30x}{x}$

ⓑ $\forall x \in [1;4]$, $x > 0$ donc f' est du signe du numérateur

Puis $f'(x) \geqslant 0 \iff 35 - 30x \geqslant 0 \iff 5(7-6x) \geqslant 0$

$\iff 7 - 6x \geqslant 0$

$\iff 6x \leqslant 7$

$\iff x \leqslant \frac{7}{6}$

x	1		$\frac{7}{6}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	$\nearrow$	$15 + 35 \ln \frac{7}{6}$	$\searrow$	$70(-1+\ln 2)$

ⓒ

on a : $f(1) = -30 \times 1 + 50 + 35 \times \ln 1 = -30 + 50 + 0 = 20$

$f\left(\frac{7}{6}\right) = -30 \times \frac{7}{6} + 50 + 35 \times \ln \frac{7}{6} = -35 + 50 + 35 . \ln \frac{7}{6} = 15 + 35 \ln \frac{7}{6}$

$f(4) = -30 \times 4 + 50 + 35 \ln 4 = -120 + 50 + 35 \ln(2^2) = -70 + 70 \ln 2 = 70(-1 + \ln 2)$

2) Raisonnons par disjonction de cas sur $[1 ; \frac{7}{6}]$ et sur $]\frac{7}{6} ; 4]$

* f est continue et croissante sur $\left[1 ; \frac{7}{6}\right]$, avec $f(1) = 20$ et $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \simeq 20{,}4$

Comme $0 \notin \left[f(1) ; f\left(\frac{7}{6}\right)\right]$, $f(x) = 0$ n'admet aucune sol. sur $\left[1 ; \frac{7}{6}\right]$

* f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]\frac{7}{6};4]$

On a $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \simeq 20,4$ et $f(4) = 70(-1+\ln 2) \simeq -21,5$

Comme $0 \in \left[f(4) ; f\left(\frac{7}{6}\right)\right[$, d'après le théorème de la bijection

(corollaire du TVI), $f(x) = 0$ admet une unique sol. α sur $]\frac{7}{6};4]$

* Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique sol. } \alpha \text{ sur } [1;4]}$

Puis par balayage, on obtient : $\alpha \in]2,9147 ; 2,9148[$

puis $\boxed{\alpha \simeq 2,915}$ à 10^{-3} près

<u>Rem :</u> Pour rappel, on encadre avec une amplitude de 10^{-4} pour ensuite donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
D'une manière générale, on encadre avec une amplitude de $10^{-(n+1)}$ pour ensuite donner une valeur approchée à 10^{-n} près $(n \in \mathbb{N})$

On peut éventuellement détailler le balayage sur la copie :

$f(2,9) \simeq 0,26$ et $f(3) \simeq -1,55$

Puis $f(2,91) \simeq 0,09$ et $f(2,92) \simeq -0,09$

Puis $f(2,914) \simeq 0,013$ et $f(2,915) \simeq -0,005$

Puis $f(2,9147) \simeq 0,0008$ et $f(2,9148) \simeq -0,0010$

3)

x	1		α		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ <u>Partie 2 :</u> $\quad \forall x \in [1;4]$, $\quad B(x) = -15x^2 + 15x + 35x . \ln x$

1) $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln(2,5) \simeq 23,925$ à 10^{-3} près

Le bénéfice pour 2500 L vendus est d'environ $\boxed{23\,925\text{ €}}$

2) La fonction B est dérivable sur $[1;4]$ comme somme de fcts dérivables sur $[1;4]$

$\forall x \in [1;4]$, $\quad B'(x) = -15 \times 2x + 15 + 35\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right)$

$$= -30x + 15 + 35(1 + \ln x)$$
$$= -30x + 15 + 35 + 35 \ln x$$
$$= -30x + 50 + 35 \ln x$$
$$= \boxed{f(x)}$$

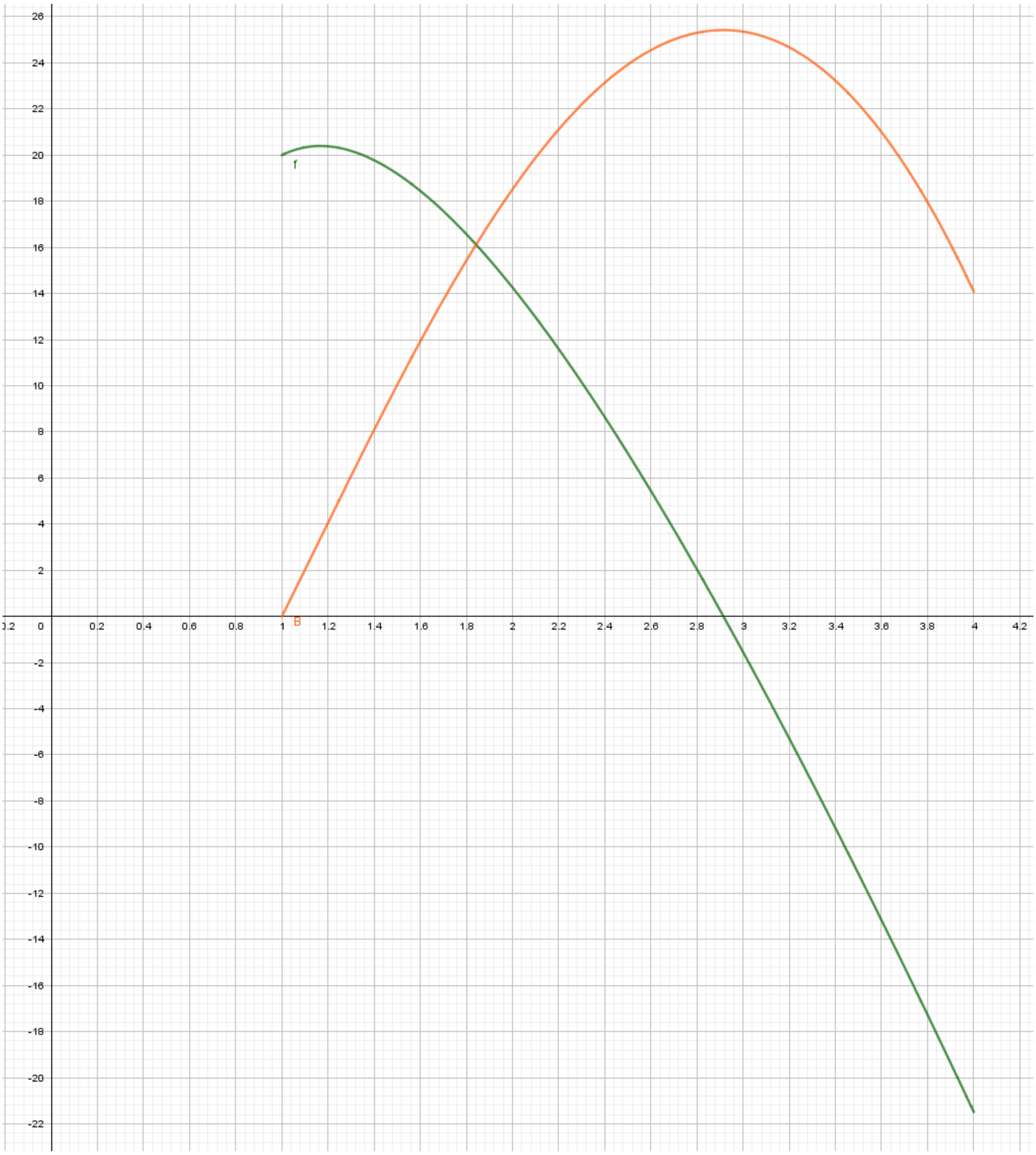
3) ⓐ

x	1		α		4
$B'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$-180 + 280 \ln 2$

ⓑ B atteint son maximum $B(\alpha)$ pour $x = \alpha$

D'après la question 2) de la Partie 1, l'entreprise doit vendre environ $\boxed{2915\text{ L}}$ de jus de fruits (au L près) pour réaliser un bénéfice maximal.

Pour info, $B(\alpha) \simeq B(2,915) \simeq 25,420$ donc environ 25420€ de bénéfice maximal.


f
B
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8
4
4.2