Ex1 :

→ **Partie I** $\qquad X \sim \mathcal{B}(9\,;\,0{,}03)$

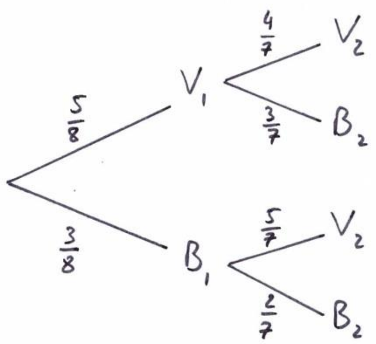
$\boxed{1)\ (d)}$ $\quad P(X=0) = \binom{9}{0} \times 0{,}03^0 \times (1-0{,}03)^{9-0} = 1 \times 1 \times 0{,}97^9 \simeq 0{,}76$

$\boxed{2)\ (c)}$ $\quad P(X=2) = \binom{9}{2} \times 0{,}03^2 \times (1-0{,}03)^{9-2} = \binom{9}{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^7$

$\boxed{3)\ (d)}$ $\quad$ On veut $P(X \geqslant 1) = P(X > 0) = 1 - P(X=0)$

→ **Partie II**

$\boxed{4)\ (b)}$



⚠ le tirage se fait ~~sans~~ remise

Il y a 8 boules au total (5 Vertes + 3 Blanches)

On lit $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$

$\boxed{5)\ (a)}$ $\quad V_1$ et B_1 forment un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) \\ &= P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{20}{56} + \frac{15}{56} \\ &= \frac{35}{56} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Ex 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \end{cases}$

(Rem : (u_n) et (v_n) sont des suites "imbriquées")

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$

1) a) $u_1 = u_0 + v_0 = 1+1 = \boxed{2}$

$v_1 = 2u_0 + v_0 = 2\times 1 + 1 = \boxed{3}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n \iff v_{n+1} - v_n = 2u_n$

or d'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0 \Rightarrow 2u_n > 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n > 0$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement croissante.}}$

Comme toute suite strictement croissante est minorée par son premier terme, (v_n) est minorée par $v_0 = 1$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 1}$

c) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geqslant 0+1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant n+1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant n+2$

$\left.\begin{array}{l} \text{D'après HR : } u_n \geqslant n+1 \\ \text{D'après 1.b : } v_n \geqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \geqslant (n+1)+1 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant n+2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1}$

d) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n+1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$ et $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$

Par ailleurs, on a admis que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, donc $u_n^2 > 0$

Diviser par u_n^2 est donc autorisé et ne change pas le sens de l'encadrement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{-1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}}$$

b) D'après (1.d), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$

Puis par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{u_n^2} = 0^-$

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$

D'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement),

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0}$$

c) En utilisant le résultat précédent, et comme $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

On en déduit par somme de limites que : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2}$

Puis on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $r_n > 0$

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \sqrt{2}}$

En effet, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n > 0$, la suite (r_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{2}$.

d) $$\forall n \in \mathbb{N},\quad r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{\cancel{u_n}\left(2 + \frac{v_n}{u_n}\right)}{\cancel{u_n}\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)} = \boxed{\frac{2 + r_n}{1 + r_n}}$$

e) La valeur de $n \in \mathbb{N}$ renvoyée est la plus petite vérifiant $|r_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-4}$

Il s'agit de la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle l'écart entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieur ou égale à 10^{-4}.

En d'autres termes, r_5 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près

Rem : Théoriquement, le programme ne va rien renvoyer car il faut au préalable importer "sqrt" depuis le module "math"

Ex 3 :

Dans le R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

1) ⓐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires qui dirigent (ABC). Montrons alors que $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Dans le RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2\times 3 + 3\times 2 + 0\times 6 = -6+6+0 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times 3 + 0\times 2 + 1\times 6 = -6+0+6 = 0 & \text{donc } \overrightarrow{AC} \perp \vec{n} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } (ABC)}$

ⓑ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\iff (x-2)\times 3 + (y-0)\times 2 + (z-0)\times 6 = 0$

$\iff 3x - 6 + 2y + 6z = 0$

$\iff \boxed{3x + 2y + 6z - 6 = 0}$

2) ⓐ Soit d la droite passant par O et orthogonale à (ABC)

d est donc dirigée par tout vecteur normal à (ABC), en particulier $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$

Comme $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in d$, on peut donner une représentation paramétrique :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

b) $d \cap (ABC)$: $\begin{cases} 3x + 2y + 6z - 6 = 0 \\ x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases}$

$\Rightarrow 3 \times 3t + 2 \times 2t + 6 \times 6t - 6 = 0$

$\Rightarrow 9t + 4t + 36t - 6 = 0$

$\Rightarrow 49t = 6$

$\Rightarrow t_H = \dfrac{6}{49}$

On a donc $d \cap (ABC) = \{H\}$ avec $H \begin{cases} x = 3t_H = 3 \times \frac{6}{49} = \frac{18}{49} \\ y = 2t_H = 2 \times \frac{6}{49} = \frac{12}{49} \\ z = 6t_H = 6 \times \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{d \cap (ABC) = \left\{ H \begin{pmatrix} 18/49 \\ 12/49 \\ 36/49 \end{pmatrix} \right\}}$

c) Dans le R.O.N., $OH = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{\left(\frac{18}{49} - 0\right)^2 + \left(\frac{12}{49} - 0\right)^2 + \left(\frac{36}{49} - 0\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{324 + 144 + 1296}{49^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{1764}}{\sqrt{49^2}}$

$= \dfrac{42}{49}$

$= \boxed{\dfrac{6}{7}}$ u.l.

3) $\mathcal{V}_{pyr.} = \frac{1}{3} . \mathcal{B} . h$

* En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur [OC], on a :

$\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AOB} \times OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times OA \times OB \times OC = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times 1 = 1$ u.v.

* En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur [OH], on a :

$\mathcal{V}_{OABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times OH = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7} \times \mathcal{A}_{ABC}$

* Enfin, en égalisant les deux expressions de $\mathcal{V}_{OABC}$, on obtient :

$\frac{2}{7} . \mathcal{A}_{ABC} = 1 \iff \boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{7}{2} \text{ u.a.}}$

Ex A :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 . e^{-x} \quad$ et $\quad g(x) = e^{-x}$

1) ⓐ $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x)$

$\iff x^2 . e^{-x} = e^{-x}$

$\iff x^2 e^{-x} - e^{-x} = 0$

$\iff (x^2 - 1) . e^{-x} = 0$

$\iff x^2 - 1 = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} \neq 0$

$\iff (x+1)(x-1) = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = 1$

On a : $g(-1) = e^{-(-1)} = e$ et $g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont donc deux points d'intersection de coordonnées $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ e \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{pmatrix}}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - g(x) = x^2 e^{-x} - e^{-x} = (x^2 - 1) . e^{-x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, $f - g$ est du signe de $(x^2 - 1)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$	intersection $\begin{pmatrix} -1 \\ e \end{pmatrix}$	$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$	intersection $\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{pmatrix}$	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$	

2) $\forall x \in [-1;1]$, $d(x) = e^{-x} - x^2 . e^{-x}$

ⓐ On admet que d est dérivable sur $[-1;1]$, donc :

$$\forall x \in [-1;1], \quad d'(x) = -e^{-x} - \left(2x.e^{-x} + x^2 \times (-e^{-x})\right)$$

$$= -e^{-x} - 2x.e^{-x} + x^2.e^{-x}$$

$$= \boxed{e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)}$$

ⓑ $\forall x \in [-1;1]$, $e^{-x} > 0$ donc d' est du signe de $x^2 - 2x - 1$

Etude du trinôme : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$

Puis $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Comme on travaille dans $[-1;1]$ et que $1 + \sqrt{2} > 1$, nous allons représenter uniquement $1 - \sqrt{2} \in [-1;1]$ dans le tableau.

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
$x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		↗		↘	

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

ⓒ D'après le tableau de variations précédent, d atteint son maximum sur $[-1;1]$ pour $x_0 = 1 - \sqrt{2}$

On a : $d(x_0) = d(1-\sqrt{2}) = e^{-1+\sqrt{2}} - (1-\sqrt{2})^2 . e^{-1+\sqrt{2}} \simeq 1,3$ à 10^{-1} près

D'où $\boxed{M_0N_0 \simeq 1,3}$ à 10^{-1} près

3) Soit $\Delta : \; y = x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = e^{-x} - x - 2$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; h'(x) = -e^{-x} - 1 \; = \; -(e^{x} + 1) \; < 0$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Par ailleurs, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - x - 2 = -\infty & \text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - x - 2 = +\infty & \text{car } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

On a h continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

De plus, $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ (intervalle image), d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{h(x) = 0 \text{ possède une unique solution sur } \mathbb{R}}$

Comme par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = g(x) - y_\Delta$

On en déduit que $\boxed{\mathcal{E}_g \text{ et } \Delta \text{ possèdent un unique point d'intersection.}}$

<u>Rem:</u> Au lieu de déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$, on aurait pu voir que $h(-1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$ et $h(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ et utiliser le théorème de Bolzano. Ceci nous permettait d'ailleurs d'affiner la localisation du point d'intersection I : $x_I \in \,]-1 \, ; 0[$

Ex B :

→ Partie I : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = \ln(x) + 2x - 2$

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 2 = +\infty$ ⇒ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x - 2 = -2$ ⇒ Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$

2) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g'(x) = \frac{1}{x} + 2 \ > 0$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) La fct g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

On a $g(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ d'après la 1ère question

Comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

⚠ Remarquer que $x = 1$ est solution de $g(x) = 0$ garantit l'existence mais pas l'unicité.

4) $g(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 2 = 0 + 2 - 2 = 0$, et comme g est strictement croissante :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

→ Partie II $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\ln(x) - 1\right)$

1) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 1\right) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{x^2} + \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2}$$

$$= \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$ donc f' est du signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la question I.4

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

On a $f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right) \times \left(\ln(1) - 1\right) = 1 \times (-1) = -1$

Rem : Les limites en 0^+ et $+\infty$ n'étaient pas demandées mais ne posent aucune difficulté

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ puis $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x-1) = -\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = 0 \iff \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\ln(x) - 1\right) = 0$

$\iff 2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff \frac{1}{x} = 2$ ou $\ln x = 1$

$\iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = e$

Les deux solutions sont strictement positives, donc : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{2} \; ; \; e\right\}}$

En utilisant le résultat précédent et le tableau de variations de f, on en déduit le tableau de signes de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

→ Partie III

1) f est la dérivée de F, donc on peut dresser le tableau de variations de F à partir du tableau de signes de f (cf II.2)

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Sans information sur l'expression de F, on ne peut pas donner de limites ni de valeurs des extrémums.

2) $F'(x) = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = e$

$\mathcal{E}_F$ admet donc $\boxed{\text{deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses,}}$

en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = e$

Rem : En fin d'année de Terminale, nous serons capables de déterminer l'expression de F, primitive de f :

Tout d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\ln(x) - 1\right)$

$$= 2\ln(x) - 2 - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x.\ln(x) - x$, obtenue en faisant une intégration par parties.

Pour $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, on l'écrit $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln x$, de la forme $u'.u$ avec $u : x \mapsto \ln x$. Une primitive est alors $\frac{1}{2}.u^2$, i.e : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x$

Finalement, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = 2\left(x.\ln(x) - x\right) - 2x - \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2 + \ln x$$

$$= 2x.\ln(x) - 2x - 2x - \frac{1}{2}\ln(x) \times \ln(x) + \ln(x)$$

$$= \ln(x) \times \left(2x + 1 - \frac{1}{2}\ln x\right) - 4x$$