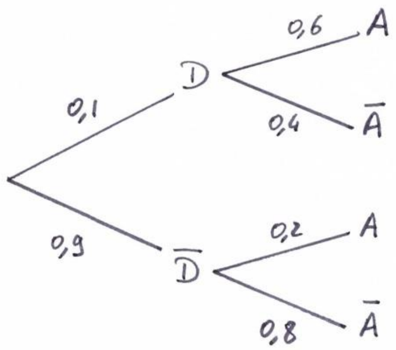
Ex 1 :

→ Partie 1 :

1)



2) $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = \boxed{0,06}$

3) D et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2$$
$$= 0,06 + 0,18$$
$$= \boxed{0,24}$$

4) $$P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A)}{P(A)} = \frac{0,9 \times 0,2}{0,24} = \frac{9 \times \cancel{2}^{1}}{\cancel{24}_{12}} = \boxed{\frac{3}{4} = 0,75}$$

→ Partie 2 :

1) a) On tire au sort 7 candidats donc $n = 7$
$p = P(A) = 0,24$
$\Rightarrow \boxed{X \sim \mathcal{B}(7 ; 0,24)}$

b) $P(X=1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1-0,24)^{7-1} \boxed{\simeq 0,32}$ (à 10^{-2} près)

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \simeq 1 - 0,47 \boxed{\simeq 0,53}$ (à 10^{-2} près)

2) a) On répète $n \in \mathbb{N}^*$ fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "le candidat est admis" est de 0,24.

Donc on peut définir la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}24)$

Puis $P(Y=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}24^0 \times (1-0{,}24)^{n-0} = 1 \times 1 \times 0{,}76^n = \boxed{0{,}76^n}$

b) On veut $P(Y \geq 1) \geq 0,99$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 - P(Y=0) \geq 0{,}99 \\
&\iff P(Y=0) \leq 1 - 0{,}99 \\
&\iff 0{,}76^n \leq 0{,}01 \\
&\iff \ln(0{,}76^n) \leq \ln 0{,}01 \\
&\iff n \cdot \ln 0{,}76 \leq \ln 0{,}01 \\
&\iff n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}76} \quad \text{car } \ln 0{,}76 < 0
\end{aligned}$$

On a $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}76} \simeq 16,8$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc la probabilité qu'au moins un élève du lycée soit admis est supérieure ou égale à 0,99 à partir de $\boxed{n = 17}$ élèves.

Ex2 :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

1) a) D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$

b) On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$ Par quotient, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Donc $\boxed{\text{l'axe des ordonnées est asymptote à } \mathcal{C}_f}$ (asymptote verticale)

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$

4) Soit $m \in \mathbb{R}$, on recherche le nombre d'antécédents de m par f

D'après le tableau de variations précédent :

Si $m < e$	,	$f(x) = m$	n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$
Si $m = e$	,	$f(x) = m$	a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ $(x = 1)$
Si $m > e$	,	$f(x) = m$	a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Soit Δ d'équation $y = -x$

ⓐ On a : $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f$ tq la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est parallèle à Δ.

On veut donc $f'(a) = -1 \iff \dfrac{e^a(a-1)}{a^2} = -1$

$$\iff e^a(a-1) = -a^2$$

$$\iff e^a(a-1) + a^2 = 0$$

Donc $\boxed{a \text{ est solution de l'équation } e^x(x-1) + x^2 = 0}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad g(x) = e^x(x-1) + x^2$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad g'(x) = e^x(x-1) + 1 \times e^x + 2x = e^x \times (x-1+1) + 2x = xe^x + 2x$

$$= \boxed{x(e^x + 2)}$$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x + 2 > 0$ et $x \geqslant 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

on a : $g(0) = e^0(0-1) + 0^2 = 1 \times (-1) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(x-1) = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Par somme,} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{array}$$

ⓒ La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

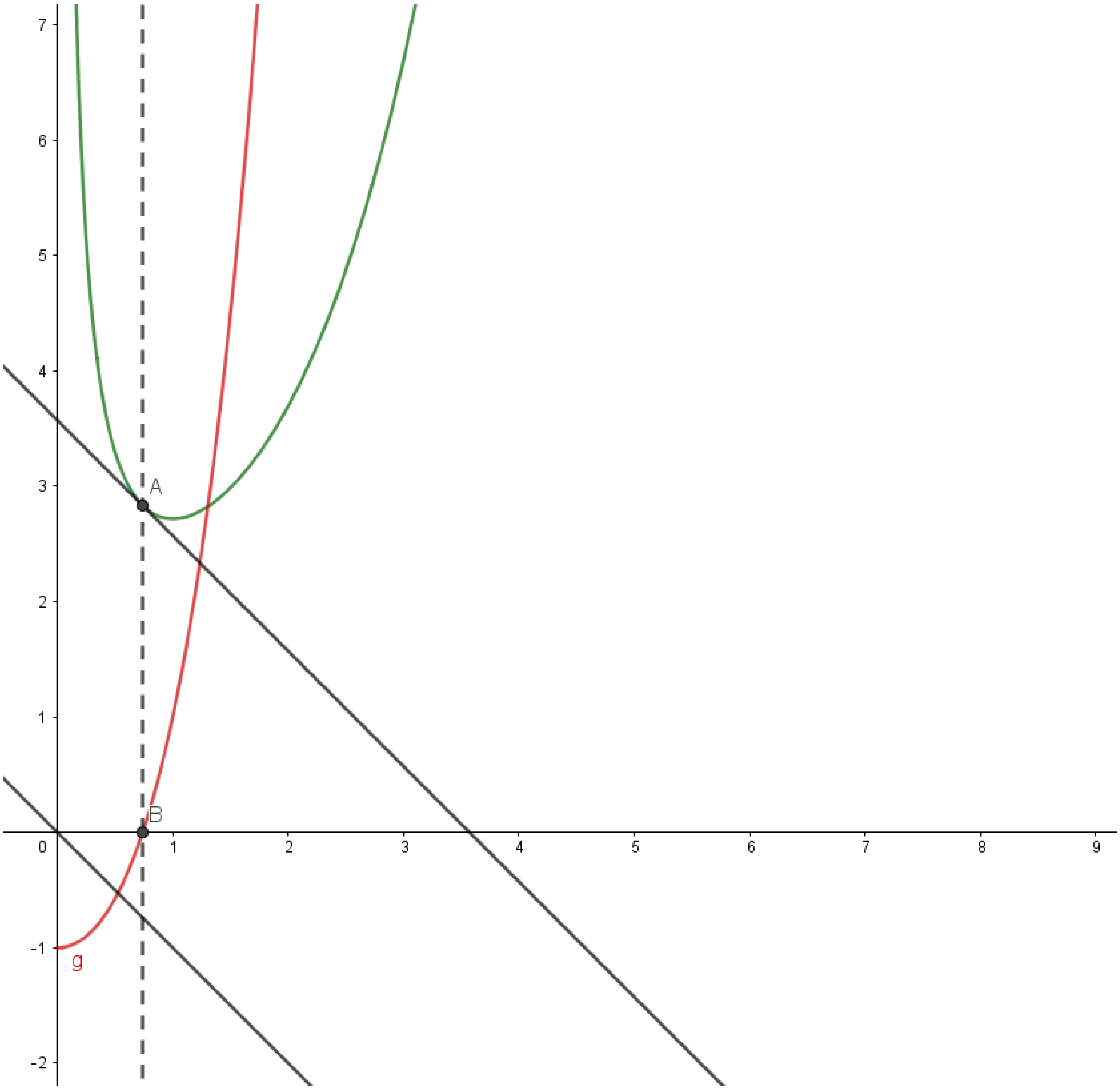
On a : $g(\mathbb{R}_+) = [-1 ; +\infty[$, or $0 \in [-1 ; +\infty[$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$\boxed{\exists !\, \alpha \in \mathbb{R}_+ ,\ g(\alpha) = 0}$

Or d'après la question 5.a, on a : $g(a) = 0 \iff f'(a) = -1$

Donc $\boxed{\text{il existe un unique point } A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \text{ en lequel la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ est parallèle à la droite } \Delta}$


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
A
B
g

Ex 3 :

1) ©

(DK) et (SD) sont confondues ; (AS) et (IC) forment le plan (SAC)

D'après le corollaire du th. de Thalès, (LM) // (CB)
Dans le carré ABCD, (AD) // (CB)
$\Rightarrow$ (AD) // (LM) donc coplanaires

2) ⓑ

* Par projections orthogonales, en utilisant si besoin le th. de Thalès,

on a : $K\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ puis $N \begin{cases} x_N = \frac{x_K + x_L}{2} = \frac{1}{4} \\ y_N = \frac{y_K + y_L}{2} = -\frac{1}{4} \\ z_N = \frac{z_K + z_L}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

* On pouvait également introduire $E\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ le milieu de [CD] puis N est le milieu de [SE]

3) ⓑ

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} x_S - x_A \\ y_S - y_A \\ z_S - z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) ©

Comme $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (AS), on peut directement exclure les réponses ⓐ et ⓓ dont le paramètre en y n'est pas nul. L'appartenance des pts A ou S permettent ensuite d'exclure ⓑ et de valider © : $t_A = -1$ et $t_S = 0$

5) ⓑ

Il serait trop long ici de rechercher une équation de (SCB) à partir d'un vecteur normal. Nous allons procéder par exclusion en testant les coordonnées des 3 points S ; B et C.

Les plans décrits par ⓐ et © ne contiennent pas $C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

le plan décrit par ⓓ ne contient pas $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On vérifie ensuite la réponse ⓑ :
$x_B + y_B + z_B - 1 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$
$x_C + y_C + z_C - 1 = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$
$x_S + y_S + z_S - 1 = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$

Ex A :

(u_n) : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1$

1) $u_1 = \frac{3}{4} u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \boxed{\frac{7}{4}}$

$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \boxed{\frac{41}{16}}$

2) a) $\boxed{= (3/4) * B2 + (1/4) * A2 + 1}$

b) Il semble que (u_n) soit $\boxed{\text{strictement croissante}}$

3) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0;1]$ $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n = 0$, supposons que $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ et mq $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$

On a : $\underset{HR}{n \leqslant u_n \leqslant n+1} \Rightarrow \frac{3}{4} n \leqslant \frac{3}{4} u_n \leqslant \frac{3}{4} n + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{4} n + \frac{1}{4} n \leqslant \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} u_n \leqslant \frac{3}{4} n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} n$

$\Rightarrow n \leqslant \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n \leqslant n + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow n + 1 \leqslant \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1$

$\Rightarrow n + 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} < n + 2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; n \leqslant u_n \leqslant n+1}$

ⓑ D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$

Ainsi, on a également par chgt d'indice : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$, d'après le th. de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Remarque : Cette façon de procéder ne nous a pas permis de démontrer la stricte croissance de (u_n). On aurait pu procéder comme suit :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 - u_n = -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 = \frac{1}{4}(n - u_n) + 1$

or d'après 3.a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n+1 \Rightarrow -u_n \geqslant -n-1$

$\Rightarrow n - u_n \geqslant n - n - 1$

$\Rightarrow n - u_n \geqslant -1$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(n - u_n) \geqslant -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(n - u_n) + 1 \geqslant -\frac{1}{4} + 1$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{3}{4}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$

La stricte croissance était alors prouvée.

ⓒ On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \Rightarrow \frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n} \Rightarrow 1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ puis par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Ainsi, d'après le th. des gendarmes (th. d'encadrement), $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$

Remarque : Ceci signifie que les suites (u_n) et identité sont équivalentes au voisinage de $+\infty$

On note : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$

4) Soit (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$$= \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$$

$$= \frac{3}{4} u_n - \frac{3}{4} n$$

$$= \frac{3}{4} (u_n - n)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot v_n$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{3}{4}}$

ⓑ On a $v_0 = u_0 - 0 = u_0 = 1$

Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\Leftrightarrow v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + n$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n}$$

Ex B :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

Transformons l'écriture de f : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln x}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$

On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (th. des croissances comparées)

Puis par produit : $\lim_{x \to +\infty} -4\frac{\ln x}{x} = 0^-$

et par somme : $\lim_{x \to +\infty} 1 - 4\frac{\ln x}{x} = 1$

puis par produit : $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

Par ailleurs, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ donc par produit : $\lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{x} = 0^-$

Enfin, par somme de limites, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (admis dans l'énoncé), donc

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 - 4 \times \frac{1}{x} - 3 \times \frac{-1}{x^2}$

$= 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$

$= \boxed{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}}$

3) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, f' est du signe de son numérateur $x^2 - 4x + 3$

$x_1 = 1$ est racine évidente, puis $x_1 . x_2 = \frac{3}{1} \iff x_2 = 3$

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (admis dans l'énoncé)

$f(1) = 1 + 4 - 4 \times \ln(1) - \frac{3}{1} = 5 - 4 \times 0 - 3 = 2$

$f(3) = 3 + 4 - 4 \times \ln(3) - \frac{3}{3} = 6 - 4\ln 3 \simeq 1,61 < \frac{5}{3}$

pour la question ⓑ

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (cf question 1)

ⓑ On utilise le théorème de la bijection (corollaire du TVI)

* Dans $]0;1[$, $f(x) = \frac{5}{3}$ possède une unique solution car f est continue et strictement croissante et on a : $\frac{5}{3} \in]-\infty ; 2[= f(]0;1[)$
* Dans $[1;3]$, $f(x) = \frac{5}{3}$ possède une unique solution car f est continue, strictement décroissante et $\frac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3 ; 2] = f([1;3])$
* Dans $]3;+\infty[$, $f(x) = \frac{5}{3}$ possède une unique solution car f est continue, strictement croissante et $\frac{5}{3} \in]6 - 4\ln 3 ; +\infty[= f(]3;+\infty[)$

Conclusion : $f(x) = \frac{5}{3}$ possède exactement $\boxed{\text{3 solutions}}$ dans $\mathbb{R}_+^*$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

La fct f' est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fct rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{(2x-4) \times x^2 - 2x.(x^2 - 4x + 3)}{(x^2)^2}$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 4x^2 - \cancel{2x^3} + 8x^2 - 6x}{x^4}$$

$$= \frac{4x^2 - 6x}{x^4}$$

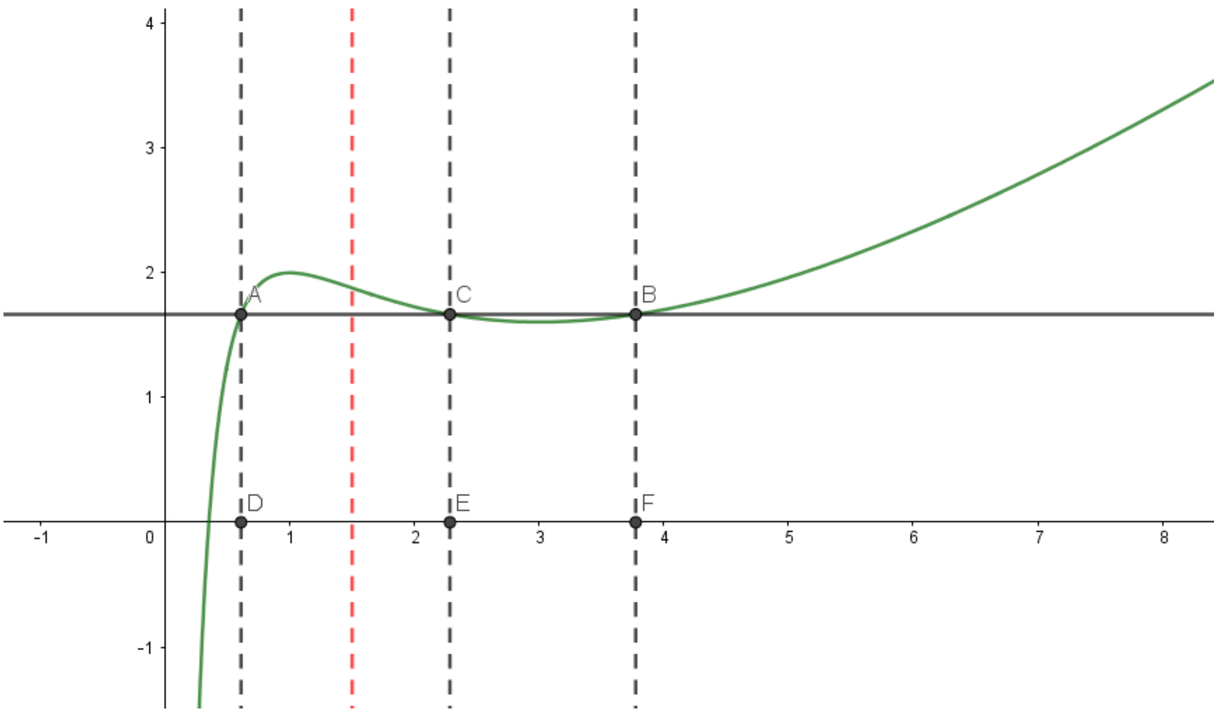
$$= \frac{4x - 6}{x^3}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^3	$\|\|$		$+$		
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	concave	inflexion	convexe	

f'' s'annule et change de signe en $x = \frac{3}{2}$ donc $\mathcal{C}$ admet un $\boxed{\text{unique point d'inflexion}}$ $I\left(\frac{3}{2} ; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

Puis $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + 4 - 2 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

D'où $\boxed{I\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix}}$



4
3
2
1
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
A
C
B
D
E
F