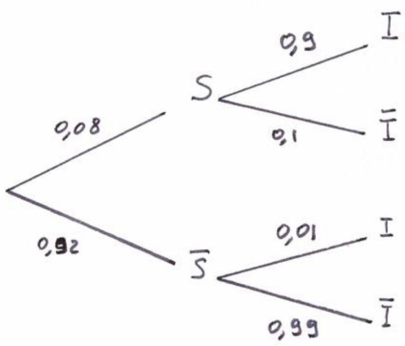
Ex 1 :

1)



2) ⓐ $P(S\cap I) = P(S)\times P_S(I) = 0{,}08\times 0{,}9 = 8\times 10^{-2}\times 9\times 10^{-1} = 72\times 10^{-3} = \boxed{0{,}072}$

ⓑ $\{S\,;\,\overline{S}\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(I) = P(S\cap I) + P(\overline{S}\cap I) = 0{,}072 + P(\overline{S})\times P_{\overline{S}}(I) = 0{,}072 + 0{,}92\times 0{,}01$$
$$= 0{,}072 + 0{,}0092$$
$$= \boxed{0{,}0812}$$

ⓒ $P_I(S) = \dfrac{P(S\cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}072}{0{,}0812} = \dfrac{720}{812}\ \boxed{= \dfrac{180}{203} \simeq 0{,}89 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$

3) ⓐ On répète $n=50$ fois de façon identique et indépendante (tirage au hasard avec remise) l'expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "le courriel est un spam" vaut $p = 0{,}08$. Ainsi, Z suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}08$: $\boxed{Z \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}08)}$

ⓑ $P(Z\geqslant 2) = 1 - P(Z<2) = 1 - \big(P(Z=0) + P(Z=1)\big)$ ou $P(Z\geqslant 2) = 1 - P(Z\leqslant 1)$

On a $\begin{cases} P(Z=0) = \binom{50}{0}\times 0{,}08^0\times(1-0{,}08)^{50-0} = 1\times 1\times 0{,}92^{50} = 0{,}92^{50} \\ P(Z=1) = \binom{50}{1}\times 0{,}08^1\times(1-0{,}08)^{50-1} = 50\times 0{,}08\times 0{,}92^{49} = 4\times 0{,}92^{49} \end{cases}$

D'où $P(Z\geqslant 2) = 1 - \left(0{,}92^{50} + 4\times 0{,}92^{49}\right) = 1 - \left(4{,}92\times 0{,}92^{49}\right)\ \boxed{\simeq 0{,}92 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$

Ex 2 :

$\boxed{1)\ B}$

Pour le pt M : $\begin{cases} 2 = 1+2t \\ 1 = -2+t \\ -1 = 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 1 \\ t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$ incompatibles donc $M \notin \Delta$

Pour le pt N : $\begin{cases} -3 = 1+2t \\ -4 = -2+t \\ 6 = 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -4 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc $N \in \Delta$ (pt de paramètre $t = -2$)

Pour le pt P : $\begin{cases} -3 = 1+2t \\ -4 = -2+t \\ 2 = 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -4 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{cases}$ incompatibles donc $P \notin \Delta$

Pour le point Q : $\begin{cases} -5 = 1+2t \\ -5 = -2+t \\ 1 = 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -6 \\ t = -3 \\ t = 3 \end{cases}$ incompatibles donc $Q \notin \Delta$

$\boxed{2)\ C}$

On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{3)\ B}$

En prenant A et $\overrightarrow{AB}$: $(AB) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Ne correspondent à aucune réponse proposée

En prenant A et $\overrightarrow{BA}$: $(AB) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = -t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

En prenant B et $\overrightarrow{AB}$: $(AB) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

En prenant B et $\overrightarrow{BA}$: $(AB)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ qui correspond à la réponse B

<u>Rem :</u> On pouvait également tester l'appartenance des points A et B pour chacune des représentations paramétriques proposées.

-> la réponse $\boxed{A}$ fonctionne pour le point A mais pas pour B ($t_A = 0$)

-> la réponse $\boxed{B}$ fonctionne pour les points A et B ($t_A = 1$ et $t_B = 0$)

-> la réponse $\boxed{C}$ fonctionne pour le point B mais pas pour A ($t_B = 0$)

-> la réponse $\boxed{D}$ ne fonctionne ni pour A ni pour B

$\boxed{4)\ B}$

Un rapide test d'appartenance du point C permettait d'exclure la réponse $\boxed{C}$

Puis Δ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est donc normal au plan $\mathcal{P}$ recherché.

Ainsi $\mathcal{P}$ a une éq. de la forme $2x + y - z + d = 0$

(⚠ Ne pas exclure trop hâtivement des réponses pour lesquelles les coefficients sont proportionnels à $(2 ; 1 ; -1)$. Il n'y avait pas ce piège ici.)

Par incohérence dans les coefficients, on pouvait immédiatement éliminer les réponses $\boxed{A}$ et $\boxed{D}$, puis conclure.

Vérifions tout de même notre réponse :

$C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ donc $2x_C + y_C - z_C + d = 0 \iff 2 \times 0 + 1 - 2 + d = 0$

$\iff d = 1$

D'où $\mathcal{P}$: $2x + y - z + 1 = 0$

$\boxed{5)\ A}$

* On a : $\vec{OD} = 3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} \iff \vec{OA} + \vec{AD} = 3\vec{OA} - (\vec{OA} + \vec{AB}) - (\vec{OA} + \vec{AC})$

$\iff \vec{AD} = \cancel{3\vec{OA}} - \cancel{\vec{OA}} - \vec{AB} - \cancel{\vec{OA}} - \vec{AC} - \cancel{\vec{OA}}$

$\iff \vec{AD} = -\vec{AB} - \vec{AC}$

Ainsi, $\vec{AD}$ est une combinaison linéaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

Donc $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

* Par ailleurs, on a : $\vec{AD} = -\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BA} - \vec{AC} \neq \vec{BC}$ $(= \vec{BA} + \vec{AC})$

Ceci exclut la réponse $\boxed{B}$.

* De plus, $3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2-0\\0-1-1\\6-0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$

Donc $D\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, ce qui exclut la réponse $\boxed{C}$

* Enfin, Attention à ne pas confondre coplanarité et colinéarité.

L'alignement des points A ; B ; C et D nécessite, par exemple :

$\begin{cases} \vec{AB} \text{ colinéaire à } \vec{AC} \\ \vec{AB} \text{ colinéaire à } \vec{AD} \end{cases} \iff \begin{cases} A ; B ; C \text{ sont alignés} \\ A ; B ; D \text{ sont alignés} \end{cases}$

Or les vecteurs $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires.

Ceci élimine la réponse $\boxed{D}$

Ex 3 :

=> Partie I : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - e^{-2x}$

1) On a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty\end{array}\right\}$ par composition, $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-2x} = -\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

D'autre part, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0^+\end{array}\right\}$ par composition, $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0^+$

Puis par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - (-2) \times e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x} > 0 \Rightarrow 2e^{-2x} > 0 \Rightarrow 1 + 2e^{-2x} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De plus, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Comme $0 \in f(\mathbb{R})$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$ et $f(1) = 1 - e^{-2} \simeq 0{,}86 > 0$ donc $\alpha \in]0;1[$

Puis on procède par balayage :

$f(0{,}4) < 0$ et $f(0{,}5) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}4 ; 0{,}5[$

puis $f(0{,}42) < 0$ et $f(0{,}43) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}42 ; 0{,}43[$

enfin $f(0{,}426) < 0$ et $f(0{,}427) > 0$ donc $\alpha \in]0{,}426 ; 0{,}427[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 0{,}43 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$

4) D'après les questions 2) et 3), on en déduit le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

→ Partie II $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} \quad$ et $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$

1) a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t^2 \geqslant 0 \\ e^{-2t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + e^{-2t} > 0$

Par ailleurs, la fct $t \longmapsto t^2 + e^{-2t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$. Cette fonction étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de composition avec la racine carrée.

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) = \frac{2t + (-2).e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{\cancel{2}\left(t - e^{-2t}\right)}{\cancel{2}\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \boxed{\frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}}$$

b) On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sqrt{t^2 + e^{-2t}} > 0$ donc h' est du signe de f.

En utilisant le tableau de signes de la question I. 4), on obtient :

t	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

Comme $OM = h(t)$, la distance OM est minimale lorsque $t = \alpha$, et cette distance minimale vaut $h(\alpha)$.

Par ailleurs, comme $M \in \mathcal{E}$ (courbe représentative de g) et qu'on appelle A le point M de $\mathcal{E}$ tq OM est minimale, on a donc $A\begin{pmatrix}\alpha \\ g(\alpha)\end{pmatrix}$ ssi $\boxed{A\begin{pmatrix}\alpha \\ e^{-\alpha}\end{pmatrix}}$

Pour placer A sur le graphique, on utilise dans un premier temps la courbe Γ représentative de f. Comme $f(\alpha)=0$, α est l'abscisse du point d'intersection de Γ et $(O,\vec{\imath})$.

Il suffit ensuite de placer le point A d'abscisse α et appartenant à $\mathcal{E}$.

Rem : Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} t \\ e^{-t}\end{pmatrix}$ puis $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\overrightarrow{OM}^2} = \sqrt{t^2+(e^{-t})^2} = \sqrt{t^2+e^{-2t}} = h(t)$

2) ⓐ Le coefficient directeur $\overbrace{\text{à la courbe}}^{\text{de la tangente } \mathcal{T}}$ $\mathcal{E}$ représentative de g en $A\begin{pmatrix} \alpha \\ e^{-\alpha}\end{pmatrix}$ est égal à la dérivée de g en α. Notons ce coefficient directeur "m".

Or g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -e^{-x}$, d'où $\boxed{m = -e^{-\alpha}}$

ⓑ Rappels de 1ère :

Soient $\begin{cases} \Delta_1 \text{ de coeff dir. } m \text{ donc } \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m\end{pmatrix} \text{ dirige } \Delta_1 \\ \Delta_2 \text{ de coeff dir. } m' \text{ donc } \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m'\end{pmatrix} \text{ dirige } \Delta_2 \end{cases}$

Puis dans le R.O.N., $\Delta_1 \perp \Delta_2 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff 1\times 1 + m\times m' = 0 \iff m.m' = -1$

(OA) est dirigée par $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \alpha \\ e^{-\alpha}\end{pmatrix}$, et donc aussi par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ $\leftarrow m'$

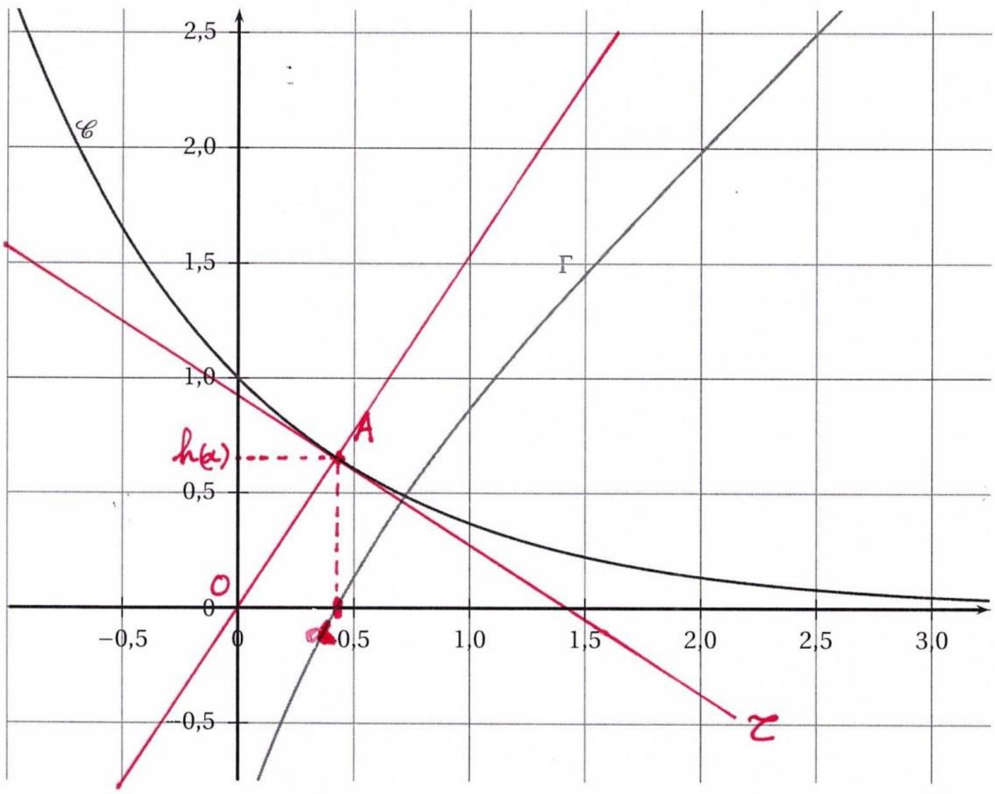
Puis $m.m' = -e^{-\alpha}\times\dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{(e^{-\alpha})^2}{\alpha} = \dfrac{-e^{-2\alpha}}{\alpha}$

Or d'après I.3), $f(\alpha)=0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff e^{-2\alpha} = \alpha$

D'où $m.m' = \dfrac{-e^{-2\alpha}}{\alpha} = \dfrac{-\alpha}{\alpha} = -1$

Ainsi $\boxed{(OA) \perp \mathcal{T}}$

Rem : Ne pas oublier de tracer les deux droites sur l'annexe !



2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
−0,5
−0,5
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
$\mathscr{C}$
Γ
A
$h(\alpha)$
O
α
τ

Ex A :

Soient (u_n) et (v_n) : $\begin{cases} u_0 = 16 \\ v_0 = 5 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3 \times u_0 + 2v_0}{5} = \dfrac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \dfrac{48+10}{5} = \boxed{\dfrac{58}{5}} \\ v_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{16+5}{2} = \boxed{\dfrac{21}{2}} \end{cases}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$$= \frac{6u_n + 4v_n}{10} - \frac{5u_n + 5v_n}{10}$$

$$= \frac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \times w_n$$

Donc $\boxed{(w_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}1}$

On a $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \cdot q^n \iff \boxed{w_n = 11 \times 0{,}1^n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0{,}1^n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$

Puis (w_n) est géométrique de raison q avec $0 < q < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0^+$ et par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0^+}$

3) (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n$

$$= \frac{3u_n + 2v_n - 5u_n}{5}$$

$$= \frac{-2u_n + 2v_n}{5}$$

$$= -\frac{2}{5}(u_n - v_n)$$

$$= \boxed{-0{,}4 \cdot w_n}$$

(b) D'après la question 2.b), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n > 0 \iff -0{,}4 \times w_n < 0 \iff u_{n+1} - u_n < 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est (strictement) décroissante}}$

(c) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5 \qquad \mathcal{P}(n)$

<u>Initialisation :</u> $\quad u_0 = 16 \geqslant 5 \implies \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 5$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 5$

On a : $\underset{(HR)}{u_n \geqslant 5} \implies 3 \cdot u_n \geqslant 15$

et $v_n \geqslant 5 \implies 2 \cdot v_n \geqslant 10$

Puis en sommant membre à membre : $\quad 3u_n + 2v_n \geqslant 15 + 10$

$$\implies 3u_n + 2v_n \geqslant 25$$

$$\implies \frac{3u_n + 2v_n}{5} \geqslant \frac{25}{5}$$

$$\implies u_{n+1} \geqslant 5 \qquad \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 5}$

La suite (u_n) est décroissante (cf 3.b) et minorée (par 5), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $l \geqslant 5$

4) ⓐ D'après la question 2.b), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Comme (u_n) et (v_n) sont convergentes, on obtient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \iff \boxed{l = l'}$

ⓑ On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = 5 . u_n + 4 . v_n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 5 . u_{n+1} + 4 . v_{n+1}$

$$= \cancel{5} \times \frac{3u_n + 2v_n}{\cancel{5}} + \cancel{4}^{2} \times \frac{u_n + v_n}{\cancel{2}}$$

$$= 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n$$

$$= 5u_n + 4v_n$$

$= c_n$ Donc $\boxed{(c_n) \text{ est constante}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5 . u_0 + 4 . v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = \boxed{100}$

ⓒ Par opérations sur les limites, on a :

$$\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 100 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} (5u_n + 4v_n) = 100$$

$$\iff 5 . \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) + 4 . \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 100$$

$$\iff 5 . l + 4 l' = 100$$

$$\iff 5l + 4l = 100 \quad \text{car } l = l'$$

$$\iff 9l = 100$$

$$\iff \boxed{l = \frac{100}{9}}$$

<u>Rem :</u> les suites (u_n) et (v_n) sont dites "adjacentes".

Ex B :

→ Partie I : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$

1) Dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0 \iff 2.\ln(x) - 1 = 0$

$\iff 2.\ln x = 1$

$\iff \ln x = \frac{1}{2}$

$\iff x = e^{\frac{1}{2}}$

$\iff x = \sqrt{e}$ $\qquad \mathcal{S} = \{\sqrt{e}\}$

Ainsi, $\boxed{\alpha = \sqrt{e} \simeq 1,65}$ (à 10^{-2} près)

2) Par lecture graphique :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

→ Partie II : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$

1) ⓐ On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln^2(x) = +\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}$

ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$", que l'on peut lever en factorisant :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln^2(x) - \ln(x) = (\ln x) \times (\ln(x) - 1)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) - 1}{x} = \boxed{f(x)}$$

3) On utilise le tableau de signes de f obtenu dans la question I.2)

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x) = f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $g(\sqrt{e}) = g(e^{1/2}) = (\ln(e^{1/2}))^2 - \ln(e^{1/2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

4) Raisonnons par disjonction de cas :

* Sur $]0; \sqrt{e}[$, g est continue (car dérivable) et strict. décroissante

  On a $g(]0;\sqrt{e}[) =]-\frac{1}{4}; +\infty[$ et $\forall m > -0{,}25$, $m \in g(]0;\sqrt{e}[)$

  Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI) : $\exists! x \in]0;\sqrt{e}[, \ g(x) = m$

* Sur $[\sqrt{e}; +\infty[$, g est continue (car dérivable) et strict. croissante

  On a $g([\sqrt{e}; +\infty[) = [-\frac{1}{4}; +\infty[$ et $\forall m > -0{,}25$, $m \in g([\sqrt{e}; +\infty[)$

  Donc d'après le théorème de la bijection : $\forall m > -0{,}25$, $\exists! x \in [\sqrt{e}; +\infty[, \ g(x) = m$

* Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout réel } m > -0{,}25, \ g(x) = m \text{ admet exactement 2 solutions}}$

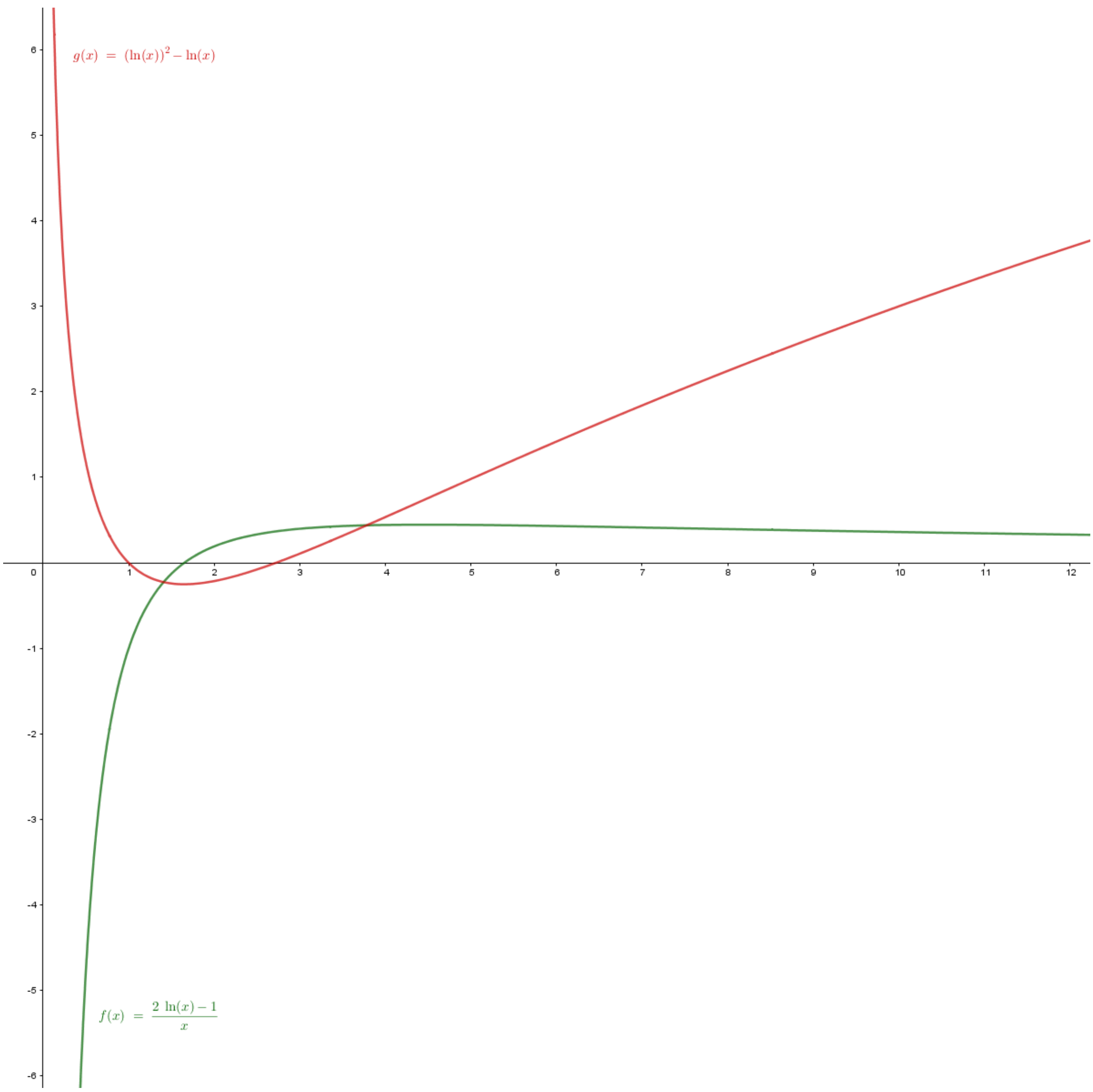
5) Dans $\mathbb{R}_+^*$, $g(x) = 0 \iff (\ln x)^2 - \ln x = 0 \iff (\ln x).(\ln(x) - 1) = 0$

$\iff \ln x = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff x = 1$ ou $\ln x = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = e$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1; e\}}$$


$g(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$
$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$