Ex 1:

$\boxed{1)\ C}$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-0{,}5$ n'est pas horizontale, ce qui exclut la réponse $\boxed{A}$.

Comme f n'est pas monotone sur $]-\infty\,;\,-0{,}5[$, la dérivée f' n'est pas de signe constant sur cet intervalle, excluant les réponses $\boxed{B}$ et $\boxed{D}$

Puis $f'(0)$ est le coefficient directeur de (AB), tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

D'où $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{20-5}{1-0} = 15 \Rightarrow$ réponse $\boxed{C}$

$\boxed{2)\ A}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+b)\,e^x$

On a $A\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(x_A) = (a\,x_A + b)\,e^{x_A} \Leftrightarrow (a\times 0 + b)\,e^0 = 5 \Leftrightarrow b = 5$

ceci exclut la réponse $\boxed{B}$

Par ailleurs, le pt de coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc :

$$\left(a\times\frac{-1}{2}+5\right)\times e^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + 5 = 0 \quad \text{car } e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a = 5$$
$$\Leftrightarrow a = 10 \qquad \Rightarrow \text{réponse } \boxed{A}$$

On pouvait également dériver sur $\mathbb{R}$ la fct $f : (ax+5)\,e^x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a.e^x + (ax+5)\,e^x = (ax+a+5)\,e^x$

Puis d'après la question 1 : $f'(0) = 15 \Leftrightarrow (a\times 0 + a + 5)\times e^0 = 15$

$$\Leftrightarrow a + 5 = 15$$
$$\Leftrightarrow a = 10$$

$\boxed{3)\ C}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (10x + 25)e^{x}$ qui est du signe de $10x+25$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$

Puis $f''(x) \geqslant 0 \iff 10x + 25 \geqslant 0 \iff 10x \geqslant -25 \iff x \geqslant -2{,}5$
$\iff x \geqslant x_C$

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

inflexion
(pt C)

$\boxed{4)\ D}$

* la réponse $\boxed{A}$ peut être exclue en considérant les suites $U_n = (-1)^n$ qui diverge et $V_n = 2 + \frac{1}{n}$

* la réponse $\boxed{B}$ peut être exclue en considérant les suites $U_n = (-1)^n$ et $V_n = 2 + \frac{1}{n}$ qui est minorée par 2

* la réponse $\boxed{C}$ peut être exclue en considérant les suites $U_n = 1$ qui converge (car constante) et $V_n = 2 + \frac{1}{n}$

* (V_n) converge vers 2 donc elle est bornée (th. du cours : toute suite convergente est bornée).
Ainsi, (V_n) est majorée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leqslant M$
Or on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant V_n$, donc par transitivité :
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant V_n \leqslant M$
D'où (U_n) est majorée par M $\Rightarrow$ réponse $\boxed{D}$

Ex 2 :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$, $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$ et $(u_n) : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) $u_1 = f(u_0) = \dfrac{4 \times u_0}{1+3\times u_0} = \dfrac{\cancel{4}^{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}{1+3\times\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = 2 \times \dfrac{2}{5} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$

2) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$

puis $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2 \implies \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

et montrons que $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$

On a (HR) : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

$\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$ car f est croissante

$\implies \frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{4\times 2}{1+3\times 2}$

$\implies \frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{8}{7}$

$\implies \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{8}{7} \leqslant 2 \implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion :

$\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2}$

ⓑ On peut déduire de la question précédente :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} & \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2 & \Rightarrow (u_n) \text{ est majorée (par 2)} \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 2$.

Rem : L'encadrement de la question 2.a) nous permet de dire que $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$

ⓒ Par unicité de la limite, on a : (th. du point fixe)

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

$\iff f(\ell) = \ell$) car f est continue

$\iff \dfrac{4\ell}{1+3\ell} = \ell$

$\iff 4\ell = \ell(1+3\ell)$ car $\ell \neq -\frac{1}{3}$

$\iff 4\ell = \ell + 3\ell^2$

$\iff 3\ell^2 - 3\ell = 0$

$\iff 3\ell(\ell - 1) = 0$

$\iff \ell = 0$ ou $\ell - 1 = 0$

$\iff \ell = 0$ ou $\ell = 1$

Or d'après la question précédente, on sait que $\ell \in [\frac{1}{2} ; 2]$

Donc $\boxed{\ell = 1}$

3) ⓐ Il faut saisir :

```
while 1-u >= E
    u = 4*u/(1+3*u)
    n = n+1
```

```python
def seuil(E):
    u=0.5
    n=0
    while 1-u >= E:
        u=4*u/(1+3*u)
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(10**-4)
7
```

⚠ Attention à la condition à exprimer dans la boucle "while"

On veut la plus petite valeur p tq $1-u_p < \varepsilon$

La boucle conditionnelle "while" doit donc faire des itérations tant que $1-u_p \geq \varepsilon$

(b) La solution la plus simple est de saisir le script dans la calculatrice et de l'exécuter. On obtient alors le rang $\boxed{n=7}$

deg PYTHON

```
def seuil(E):
  u=0.5
  n=0
  while 1-u>=E:
    u=4*u/(1+3*u)
    n=n+1
  return n
```

deg PYTHON

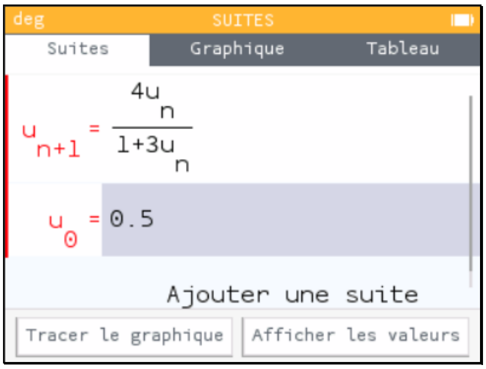
```
>>> from seuil import *
>>> seuil(10**-4)
7
>>> |
```

Sinon, on peut saisir la suite dans la calculatrice et afficher le tableau de valeurs. On recherche alors le rang n à partir duquel on a :

$$1-u_n < 10^{-4} \iff u_n > 1-10^{-4} \iff u_n > 0,9999$$

On obtient : $u_6 \simeq 0,99976$ et $u_7 \simeq 0,99994$

On choisit donc $\boxed{n=7}$



deg SUITES — Suites | Graphique | Tableau

Régler l'intervalle

0	0.5
1	0.8
2	0.9411765
3	0.9846154
4	0.9961089
5	0.9990244
6	0.9997559
7	0.999939
8	0.9999847

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}} = \dfrac{\frac{4u_n}{\cancel{1+3u_n}}}{\frac{1+3u_n-4u_n}{\cancel{1+3u_n}}} = 4\,\dfrac{u_n}{1-u_n} = 4\,v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 4}$

De plus $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n \iff \boxed{v_n = 4^n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff u_n = v_n(1-u_n)$ car $u_n \neq 1$ (c'est la limite)

$\iff u_n = v_n - u_n \cdot v_n$

$\iff u_n + u_n \cdot v_n = v_n$

$\iff u_n(1+v_n) = v_n$

$\iff \boxed{u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}}$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4^n$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} = \dfrac{4^n}{1+4^n} = \dfrac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{4^n}+1\right)} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \boxed{\dfrac{1}{1+0{,}25^n}}$

Puis comme $-1 < 0{,}25 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}25^n = 0$

Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+0{,}25^n = 1+0 = 1$

Et enfin, par passage à l'inverse, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+0{,}25^n} = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

Ex 3:

→ Partie I $\qquad \forall t \in [0;120]$, $f(t) = (0{,}04t^2 - 8t + 400)\,e^{\frac{t}{50}} + 40$

1) $f(0) = (0{,}04\times 0^2 - 8\times 0 + 400)\times e^{\frac{0}{50}} + 40 = 400\times 1 + 40 = 440$

Lors de l'introduction des truites, il y a $\boxed{440 \text{ écrevisses}}$ dans le lac.

2) D'après l'énoncé, on admet que f est dérivable sur $[0;120]$

$$\forall t \in [0;120],\ f'(t) = (0{,}04\times 2t - 8)\cdot e^{\frac{t}{50}} + (0{,}04t^2 - 8t + 400)\times \frac{1}{50}\times e^{\frac{t}{50}} + 0$$

$$= (0{,}08t - 8)\cdot e^{\frac{t}{50}} + (0{,}0008t^2 - 0{,}16t + 8)\,e^{\frac{t}{50}}$$

$$= (0{,}0008t^2 + 0{,}08t - 0{,}16t + \cancel{8} - \cancel{8})\cdot e^{t/50}$$

$$= (8\times 10^{-4}\cdot t^2 - 0{,}08t)\cdot e^{t/50}$$

$$= (8\times 10^{-4}\cdot t^2 - 8\times 10^{-2}t)\,e^{t/50}$$

$$= 8t\,(10^{-4}\cdot t - 10^{-2})\cdot e^{t/50}$$

$$= 8t\,(10^{-4}\cdot t - 100\times 10^{-4})\cdot e^{t/50}$$

$$= \boxed{t\,(t-100)\cdot e^{t/50}\times 8\times 10^{-4}}$$

3) $\forall t \in [0;120]$, $8\times 10^{-4}\times t \geqslant 0$ et $e^{t/50} > 0$

Donc f' est du signe de $(t-100)$ et s'annule en 0

t	0		100		120
$t-100$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	440	↘	40	↗	$216{,}37$

$f(100) = (0{,}04\times 100^2 - 8\times 100 + 400)\cdot e^{\frac{100}{50}} + 40 = (4\times 10^{-2}\times 10^4 - 800 + 400)\,e^2 + 40 = (400-400)\,e^2 + 40 = 0 + 40 = 40$

$f(120) = (0{,}04\times 120^2 - 8\times 120 + 400)\cdot e^{\frac{120}{50}} + 40 = (576 - 960 + 400)\cdot e^{12/5} + 40 = 16e^{12/5} + 40 \simeq 216{,}37$ à 10^{-2} près

4) a) On lit dans le tableau de variations que le nombre de crapauds atteint son $\boxed{\text{minimum } 40}$ au bout de $\boxed{J = 100 \text{ jours.}}$

b) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[100\,;120]$.

Comme $f(120) > 140$, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus

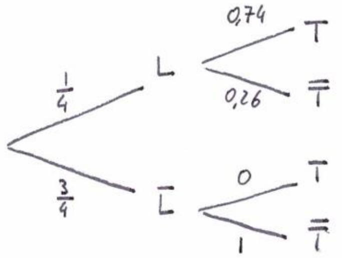
Nous avons utilisé le théorème de la bijection (corollaire du TVI) en constatant que $140 \in f([100\,;120])$, et que donc : $\exists!\, x \in [100;120]$, $f(x) = 140$

c) En procédant par balayage entre 100 et 120 avec un pas de 1, on observe que : $f(115) < 140$ et $f(116) > 140$

Donc le nombre de crapauds dépassera 140 à partir de $\boxed{116 \text{ jours.}}$

→ Partie II

1)



Dans un lac non contaminé, un têtard ne peut pas attraper la maladie

2) $\{L\,;\overline{L}\}$ forme un système complet d'événements

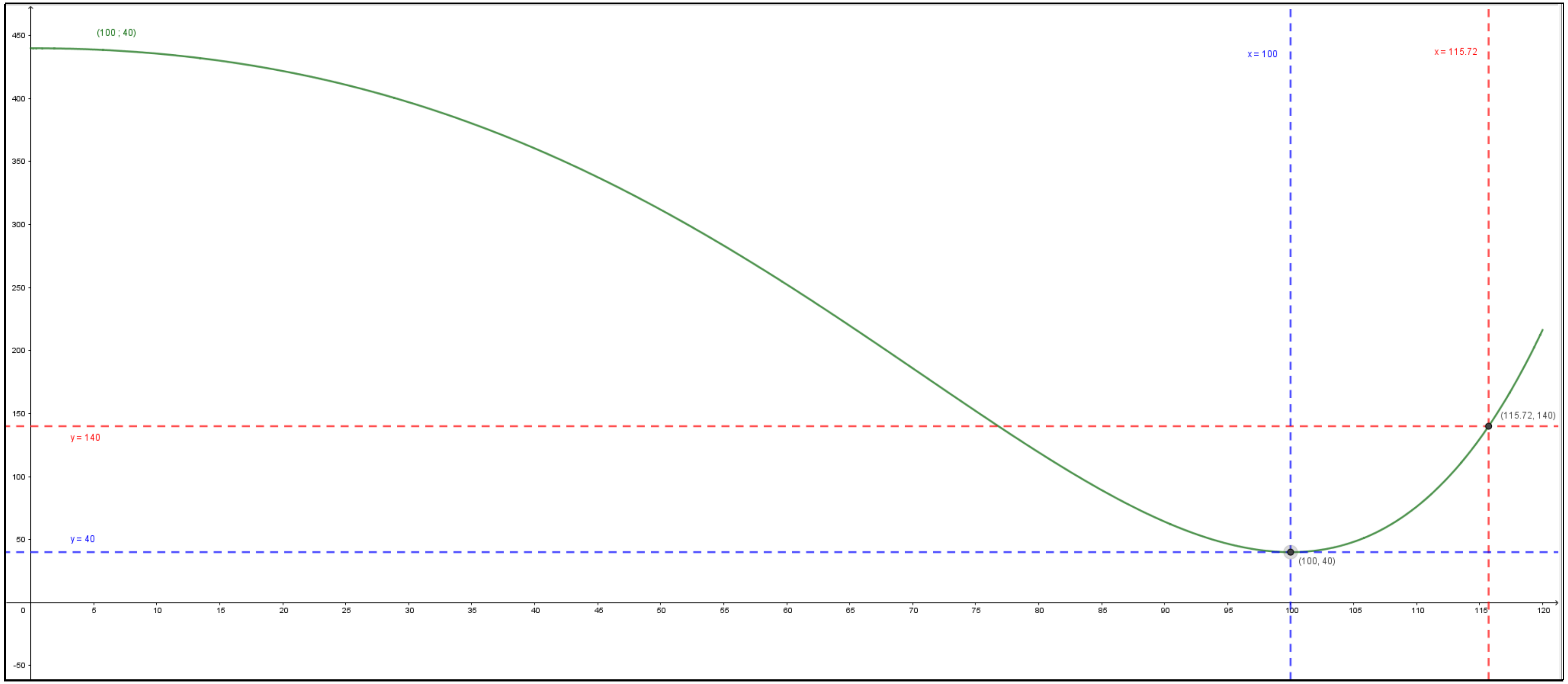
Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(L \cap T) + P(\overline{L} \cap T) = P(L) \times P_L(T) + P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(T)$$
$$= \frac{1}{4} \times 0{,}74 + \frac{3}{4} \times 0$$
$$= 0{,}185 + 0$$
$$\boxed{= 0{,}185}$$

3) $$P_{\overline{T}}(L) = \frac{P(L \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(L) \times P_L(\overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}26}{1 - 0{,}185} = \frac{0{,}065}{0{,}815} = \frac{65}{815} = \boxed{\frac{13}{163}}$$

D'où $\boxed{P_{\overline{T}}(L) \simeq 0{,}080}$ (à 10^{-3} près)

<u>Attention :</u> le repère choisi est orthogonal, mais pas orthonormé



Ex A :

1) Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a : $\boxed{I\begin{pmatrix}0\\1/4\\1\end{pmatrix} ; J\begin{pmatrix}1/4\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } K\begin{pmatrix}1\\0\\1/4\end{pmatrix}}$

2) On a $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{IJ}\begin{pmatrix}1/4\\-1/4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{IK}\begin{pmatrix}1\\-1/4\\-3/4\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ n'étant pas colinéaires (présence du 0 dans la 3e coordonnée de $\vec{IJ}$ et pas dans celle de $\vec{IK}$), ils forment une base de (IJK).

Puis dans le R.O.N., on a :

$$\begin{cases} \vec{AG}\cdot\vec{IJ} = 1\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{-1}{4} + 1\times 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0 & \text{donc } \vec{AG} \perp \vec{IJ} \\ \vec{AG}\cdot\vec{IK} = 1\times 1 + 1\times\frac{-1}{4} + 1\times\frac{-3}{4} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0 & \text{donc } \vec{AG} \perp \vec{IK} \end{cases}$$

$\vec{AG}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ qui dirigent (IJK), donc $\boxed{\vec{AG} \text{ est normal à } (IJK)}$

3) $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (IJK)

Donc (IJK) a une équation cartésienne de la forme $x+y+z+d=0$

Puis $I\begin{pmatrix}0\\1/4\\1\end{pmatrix} \in (IJK) \Leftrightarrow x_I + y_I + z_I + d = 0 \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{4} + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{5}{4}$

Ainsi, (IJK) a pour équation cartésienne : $x + y + z - \frac{5}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{4x + 4y + 4z - 5 = 0}$

Rem : Comme l'équation était donnée, on pouvait simplement s'assurer que les coordonnées des 3 points I ; J et K vérifiaient l'équation du plan.

4) On a $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ puis $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc une représentation paramétrique de (BC) : $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$ ⚠ Ne pas oublier

(en choisissant le pt B)

5) $L \in (IJK) \cap (BC) \iff \begin{cases} 4x_L + 4y_L + 4z_L - 5 = 0 \\ x_L = 1 \\ y_L = t_L \\ z_L = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 4\times 1 + 4t_L + 4\times 0 - 5 = 0$
$\Rightarrow 4 + 4t_L = 5$
$\Rightarrow 4t_L = 1$
$\Rightarrow t_L = \frac{1}{4}$

Puis $\boxed{L\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

6) D'après la question précédente, on place L tq $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Puis on a $\begin{cases} K \in (IJK) \cap (BCG) \\ L \in (IJK) \cap (BCG) \end{cases} \Rightarrow (KL) = (IJK) \cap (BCG)$

Donc l'intersection du plan (IJK) avec la face $(BCGF)$ est $\boxed{[KL]}$

⚠ (IJK) est infini mais pas la face $(BCGF)$.
Il s'agit donc bien du segment $[KL]$ mais pas de la droite (KL).

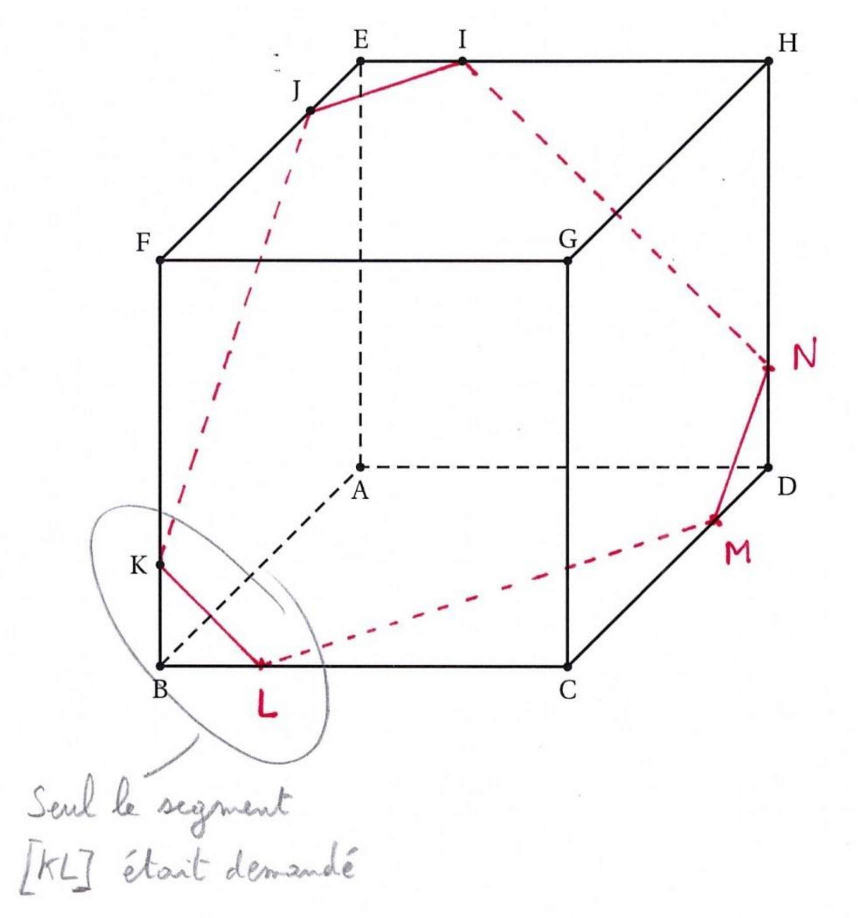
7) On sait que les points I ; J et L appartiennent au plan (IJK)
Il suffit donc de montrer que $M\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation cartésienne de (IJK)

On a : $4x_M + 4y_M + 4z_M - 5 = 4\times\frac{1}{4} + 4\times 1 + 4\times 0 - 5 = 1 + 4 + 0 - 5 = 0$

Donc $M \in (IJK)$ et $\boxed{\text{les points } I\,;\, J\,;\, L \text{ et } M \text{ sont coplanaires.}}$

OU A partir des vecteurs $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ -1 \end{pmatrix}$, on pouvait constater que $\overrightarrow{IM} = -3\,\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}$, en résolvant éventuellement un système.
$\overrightarrow{IM}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ donc ces trois vecteurs sont coplanaires. On en déduit que $\boxed{\text{les pts } I\,;\, J\,;\, L \text{ et } M \text{ sont coplanaires.}}$

<u>Rem:</u> Placer le point M sur la figure tq $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ permettait de tracer la section du cube par le plan (IJK), mais ce n'était pas demandé ... (placer le point $N \in [DH]$ tq $(MN) // (KJ)$ ou $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$ était utile ici)


E
I
H
J
F
G
N
A
D
M
K
B
L
C
Seul le segment
[KL] était demandé

Ex B :

→ Partie I : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

1) On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{cases}$ $\Rightarrow$ Par quotient, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\Rightarrow$ Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty}$

2) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (th. des croissances comparées)

Puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1 + 0 = \boxed{1}$

3) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par somme avec une constante.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$ donc h' est du signe de $1 - \ln x$

Puis $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in]0 ; e]$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1+e}{e}$	↘	1

$h(e) = 1 + \frac{\ln e}{e} = 1 + \frac{1}{e} = \frac{1+e}{e}$

5) En utilisant le tableau de variations précédent, raisonnons par disjonction de cas :

* Sur $]0;e[$, h est continue (car dérivable) et strictement croissante.

  On a $h(]0;e[) =]-\infty ; \frac{1+e}{e}[$ et $0 \in h(]0;e[)$

  Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;e[$

* Sur $[e;+\infty[$, h est continue (car dérivable) et strictement décroissante

  On a $h([e;+\infty[) =]1 ; \frac{1+e}{e}]$

  Comme $0 \notin h([e;+\infty[)$, l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de sol. sur $[e;+\infty[$

  Rem: On pourrait aussi dire que h est minorée par 1 sur $[e;+\infty[$

* Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ admet une unique sol. } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

La fonction h étant strictement croissante sur $]0;e[$, on peut procéder par balayage avec un pas de 0,1.

On obtient avec la calculatrice : $\begin{cases} h(0{,}5) \simeq -0{,}39 < 0 \\ h(0{,}6) \simeq 0{,}15 > 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{\alpha \in]0{,}5 ; 0{,}6[}$

→ Partie II $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x.\ln(x) - x \quad$ et $\quad g(x) = \ln x$

1) La droite D_a a pour coefficient directeur $g'(a)$, que l'on notera m

Or la fct g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme fct de référence,

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{1}{x} \qquad$ d'où $\boxed{m = g'(a) = \frac{1}{a}}$

2) La droite T_a a pour coefficient directeur $f'(a)$, que l'on notera m'

Or la fct f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \quad = \ln(x) + 1 - 1 \; = \ln x$

D'où $\boxed{m' = f'(a) = \ln a}$

3) On veut $m.m' = -1 \iff \frac{1}{a} \times \ln a = -1 \iff 1 + \frac{\ln a}{a} = 0$

$\iff h(a) = 0$

$\iff a = \alpha$

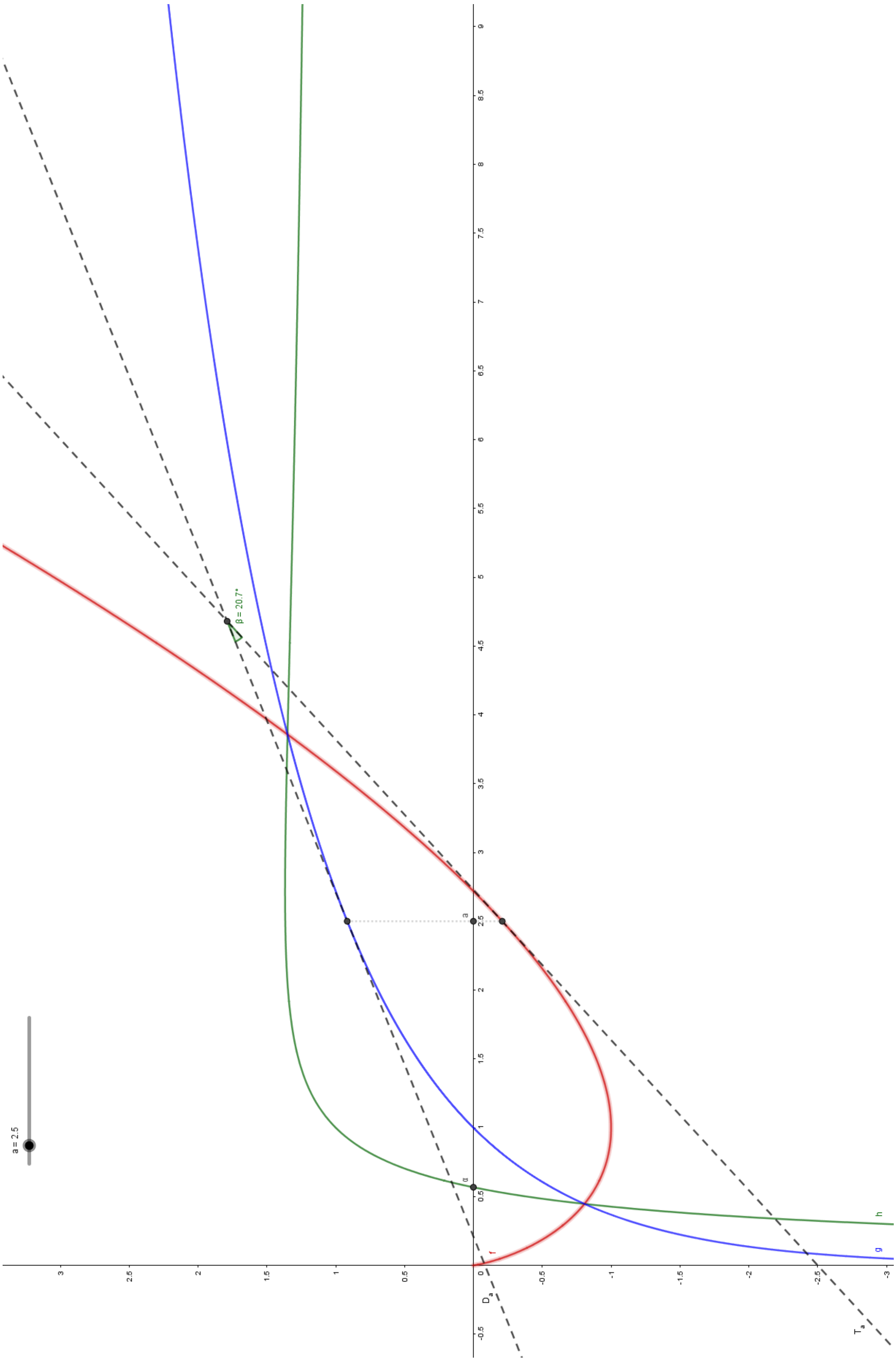
Donc $\boxed{T_a \perp D_a \iff a = \alpha}$

Rem:

Soit Δ_1 de coeff dir. m, donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de Δ_1

Soit Δ_2 de coeff dir. m', donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de Δ_2

Dans un R.O.N., on a $\Delta_1 \perp \Delta_2 \iff \vec{u}.\vec{v} = 0 \iff 1 \times 1 + m \times m' = 0 \iff m.m' = -1$


a = 2.5
β = 20.7°
f
g
h
a
α
D
T