Ex 1 :

1) (b)

$\begin{cases} -4+3t=-1 \\ 6-3t=3 \\ 8-6t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t=3 \\ 3t=3 \\ 6t=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=\frac{5}{3} \end{cases}$ incompatible $\Rightarrow M_1 \notin \mathcal{D}'$

$\begin{cases} -4+3t=11 \\ 6-3t=-9 \\ 8-6t=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t=15 \\ 3t=15 \\ 6t=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=5 \\ t=5 \end{cases} \Rightarrow M_2 \in \mathcal{D}'$

$\begin{cases} -4+3t=-7 \\ 6-3t=9 \\ 8-6t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t=-3 \\ 3t=-3 \\ 6t=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=\frac{5}{3} \end{cases}$ incompatible $\Rightarrow M_3 \notin \mathcal{D}'$

$\begin{cases} -4+3t=-2 \\ 6-3t=3 \\ 8-6t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t=-2 \\ 3t=3 \\ 6t=4 \end{cases}$ incompatible $\Rightarrow M_4 \notin \mathcal{D}'$

2) (c) On lit les coefficients du paramètre $t$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$

3) (d) $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\vec{u_3}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u_3}$ sont colinéaires donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (strictement ou confondues).

On a $A\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$, regardons si $A\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in \mathcal{D}'$

$\begin{cases} -4+3t=1 \\ 6-3t=1 \\ 8-6t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t=5 \\ 3t=5 \\ 6t=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{3} \\ t=\frac{5}{3} \\ t=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A \in \mathcal{D}'$ (pt de paramètre $t=\frac{5}{3}$)

Ainsi $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues

4) (c) Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal

Puis : $\mathcal{D} \,/\!/\, \mathcal{P} \iff \vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$

$\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\iff 1\times(-2) + m\times 2 + (-2)\times 4 = 0$

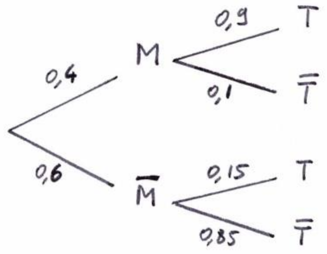
$\iff -2 + 2m - 8 = 0$

$\iff 2m = 10$

$\iff m = 5$

Ex2 :

1) a)




b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}4 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}36}$

c) $\{M ; \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= 0{,}36 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}36 + 0{,}6 \times 0{,}15 \\ &= 0{,}36 + 0{,}09 \\ &= \boxed{0{,}45} \end{aligned}$$

d) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}36}{0{,}45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4 \times \cancel{9}}{5 \times \cancel{9}} = \dfrac{4}{5} = \boxed{0{,}8}$

2) a) On répète 20 fois de manière identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "tirer un chat dont le test est positif" est $P(T) = 0{,}45$

Donc $X$ suit la loi Binomiale : $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0{,}45)$

b) $P(X=5) = \binom{20}{5} \times 0{,}45^5 \times (1-0{,}45)^{20-5} = \dfrac{20!}{5! \times 15!} \times 0{,}45^5 \times 0{,}55^{15} \simeq \boxed{0{,}036}$

à $10^{-3}$ près

c) On utilise la fonction de répartition avec la calculatrice :

$P(X \leq 8) \simeq \boxed{0{,}414}$ à $10^{-3}$ près

d) $E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}45 = 2 \times 4{,}5 = \boxed{9}$

Si on effectue un grand nombre de tirages, on peut en moyenne espérer tirer 9 chats positifs sur 20 tirages (avec remise)

3) a) $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}45^0 \times (1-0{,}45)^{n-0} = \boxed{1 - 0{,}55^n}$

b) Ce programme renvoie la plus petite valeur entière positive de $n$ telle que $p_n \geqslant 0{,}99$, i.e. telle que la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

c) On veut $p_n \geqslant 0{,}99 \iff 1 - 0{,}55^n \geqslant 0{,}99$

$$\begin{aligned}
&\iff 0{,}55^n \leqslant 0{,}01 \\
&\iff \ln(0{,}55^n) \leqslant \ln(0{,}01) \\
&\iff n . \ln(0{,}55) \leqslant \ln(0{,}01) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}55)} \quad \text{) car } \ln(0{,}55) < 0
\end{aligned}$$

On a $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}55)} \simeq 7{,}7$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc le programme renvoie $\boxed{8}$

```python
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

```
>>> seuil()
8
```

Ex 3 :

$(u_n)$ : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$

1) Il semble que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{4}{u_n} = n+4}$

Il s'agirait donc d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 4

2) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

On a : $\underset{HR}{u_n > 0} \Rightarrow u_n + 4 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n+4} > 0 \Rightarrow \dfrac{4}{u_n+4} > 0$

Puis par produit de termes positifs, $u_n \times \dfrac{4}{u_n+4} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4}{u_n+4}$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0 \Rightarrow u_n + 4 > 4 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n+4} < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{4}{u_n+4} < 1$

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante}}$

non demandé

⚠ Ne pas oublier la condition de positivité

Autre solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n}{u_n+4} - u_n = \dfrac{4u_n - u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2}{u_n+4}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$

4) $(u_n)$ est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0}$

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{4}{u_n}$ On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{4}{u_{n+1}} = \dfrac{\cancel{4}(u_n+4)}{\cancel{4}u_n} = 1 + \dfrac{4}{u_n} = 1 + v_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 1 \Rightarrow$ $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 1}$

$\boxed{\text{et de premier terme } v_0 = \dfrac{4}{u_0} = \dfrac{4}{1} = 4}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n \times r + v_0 = n \times 1 + 4 = \boxed{n+4}$

Rem : Nous venons de démontrer la conjecture émise à la question 1.
Par ailleurs, nous aurions pu très facilement démontrer cette conjecture par récurrence immédiatement après l'avoir émise.

6) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{4}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{4}{v_n} \Leftrightarrow \boxed{u_n = \dfrac{4}{n+4}}$

Puis on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 4 = +\infty$

Donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+}$

Ex A:

→ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$

1) On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$ Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$

Puis par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty}$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0^+$ (th. des croissances comparées)

Puis par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1}$

2) On admet dans l'énoncé que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$$

$$= \boxed{\frac{1 - 2\ln x}{x^3}}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ donc $h'$ est du signe de $1 - 2\ln x$

D'où $h'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 2\ln x \geqslant 0 \iff 2\ln x \leqslant 1 \iff \ln x \leqslant \frac{1}{2}$

$\iff x \leqslant e^{1/2}$

$\iff x \leqslant \sqrt{e}$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | \|\| $-\infty$ | ↗ | $1 + \frac{1}{2e}$ | ↘ | $1$ |

$h(\sqrt{e}) = 1 + \dfrac{\ln(e^{1/2})}{(\sqrt{e})^2} = 1 + \dfrac{1}{2e}$

4) Raisonnons par disjonction de cas :

* $h$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$, la fonction $h$ est minorée par 1 sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$

Donc $h(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$

* $h$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;\sqrt{e}[$

On a : $h\left(]0\,;\sqrt{e}[\right) = ]-\infty\,;1+\frac{1}{2e}[$

Comme $0 \in ]-\infty\,;1+\frac{1}{2e}[ = h\left(]0\,;\sqrt{e}[\right)$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI) : $\exists!\,\alpha \in ]0\,;\sqrt{e}[\,,\ h(\alpha)=0$

* Conclusion : Par disjonction exhaustive de cas : $\boxed{\exists!\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ h(\alpha)=0}$

En d'autres termes, $\boxed{\text{l'équation } h(x)=0 \text{ possède une unique sol. } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

Puis on a :

$$\begin{cases} h\left(\frac{1}{2}\right) = 1+\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1-4\ln 2 \simeq -1{,}8 < 0 \\ h(1) = 1+\dfrac{\ln 1}{1^2} = 1+\dfrac{0}{1} = 1 > 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Bolzano, on a donc $\boxed{\alpha \in ]\tfrac{1}{2}\,;1[}\ \subset ]0\,;\sqrt{e}[$

5) En utilisant les questions précédentes, on dresse le tableau de signes de $h$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

→ Partie II :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} \quad$ et $\quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)$

$$= \cancel{x} - 1 - \frac{\ln x}{x^2} - \cancel{x} + 2 + 2\frac{\ln x}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \boxed{h(x)}$$

2) En utilisant le tableau obtenu à la question 5 de la partie I :

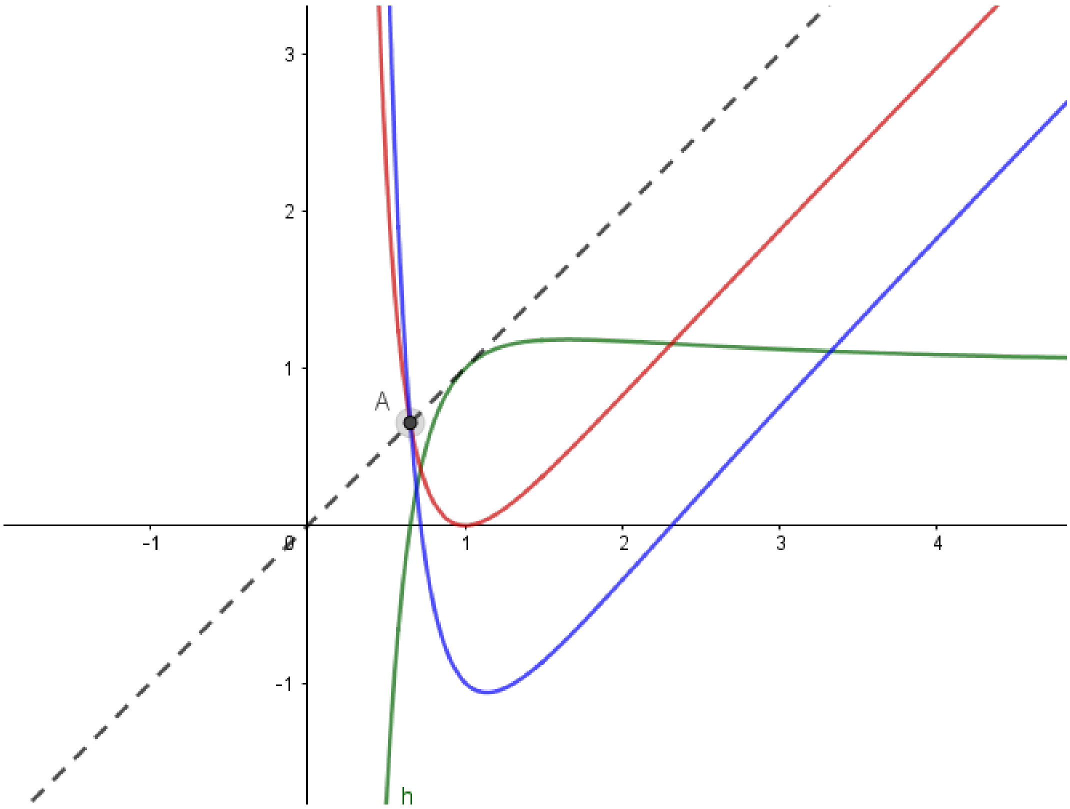
| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ | ‖ | $\mathcal{C}_1$ en dessous de $\mathcal{C}_2$ | ↑ intersection | $\mathcal{C}_1$ au-dessus de $\mathcal{C}_2$ | |

On a : $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A\}$ avec $A\begin{pmatrix}\alpha \\ f_1(\alpha)\end{pmatrix}$ ou $A\begin{pmatrix}\alpha \\ f_2(\alpha)\end{pmatrix}$

Puis $h(\alpha) = 0 \iff 1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = 0 \iff -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = 1$

On a alors : $f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = \alpha - 1 + 1 = \alpha$

D'où $\boxed{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \left\{A\begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha\end{pmatrix}\right\}}$


3
2
1
A
-1
0
1
2
3
4
-1
h

Ex B :

→ Partie I : ⚠ La courbe représente $f'$ (et pas $f$)

1) On peut conjecturer :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

2) On peut conjecturer :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| $f$ | | concave | | convexe | |

point d'inflexion

→ Partie II : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+2).\,e^{-x}$

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+2).\,e^{-x} = x.\,e^{-x} + 2.\,e^{-x} = \boxed{\dfrac{x}{e^{x}} + 2.\,e^{-x}}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ (th. croissances comparée) d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0^{+}$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0^{+}$ Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^{+}}$

Ainsi, $\boxed{\text{𝒞 admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de } +\infty.}$

Pour info, la limite de $f$ en $-\infty$ s'obtient aisément avec l'expression initiale de $f$ :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x+2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Par produit, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2) a) On admet dans l'énoncé que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = (1-x-2).e^{-x} = (-x-1).e^{-x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} > 0$ donc $f'$ est du signe de $-x-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $0^+$ |

$f(-1) = (-1+2)\,e^{-(-1)} = e$

c) $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-2\,;-1]$

On a $f(-2) = (-2+2).e^{-(-2)} = 0$ et $f(-1) = e > 2$

Comme $2 \in [0\,; e] = f([-2\,;-1])$, d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI) : $\boxed{\exists !\, \alpha \in [-2\,;-1],\ f(\alpha) = 2}$

Par balayage, on obtient : $-1,60 < \alpha < -1,59$ donc $\boxed{\alpha \simeq -1,6}$ (à $10^{-1}$ près)

3) On admet dans l'énoncé que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x}) = \boxed{x.e^{-x}}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} > 0$, $f''$ est du signe de $x$ sur $\mathbb{R}$

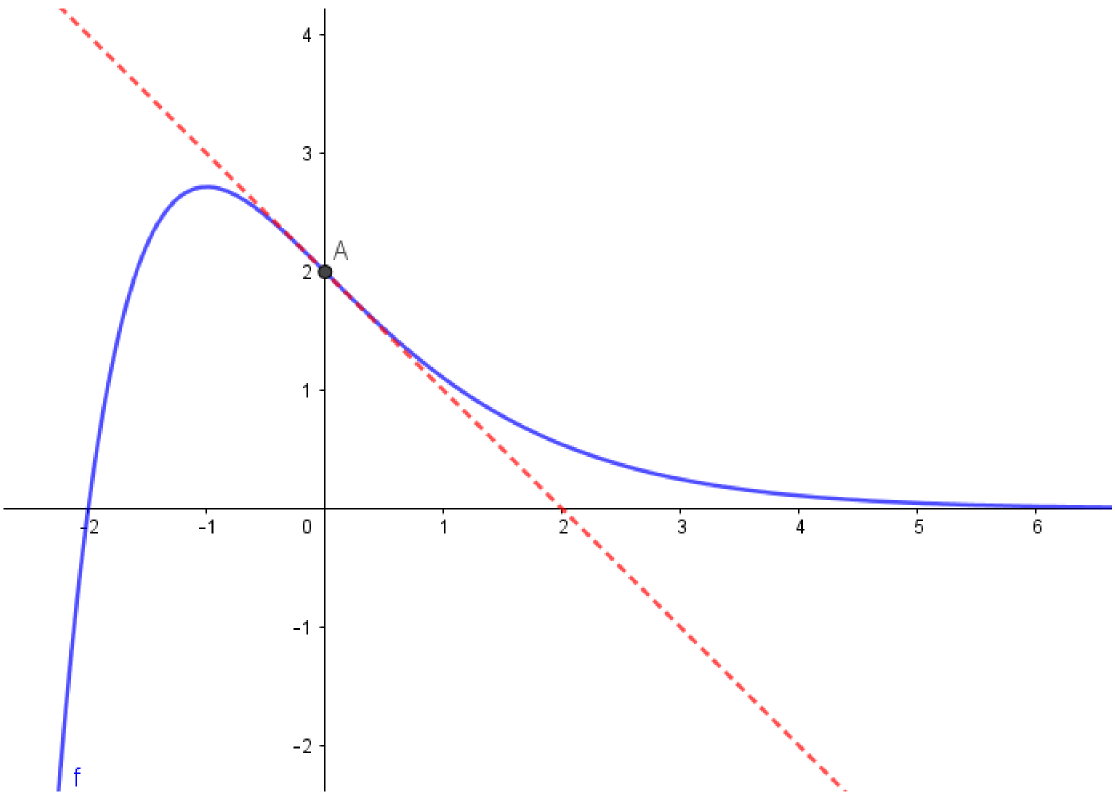
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | Concave | | Convexe | |

On a $f(0) = (0+2) \times e^0 = 2 \times 1 = 2$

$\boxed{A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est le point d'inflexion de } \mathcal{C}}$

car $f''$ s'annule et change de signe en $x = 0$

Rem : Nous avons démontré dans cette partie II les conjectures émises dans la partie I.


A
f
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5
6