Ex 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$

1) ⓒ La fct f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{2.e^{2x} \times x - 1 \times e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

2) ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{2x} > 0$ et $x^2 > 0$ donc f' est du signe de $2x-1$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘		↗	

3) ⓐ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x} = 2 \times \dfrac{e^{2x}}{2x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (th. des croissances comparées)

Puis par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4) ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{2.e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3}$ et $2.e^{2x} > 0$ et $x^3 > 0$

Donc f'' est du signe de $2x^2 - 2x + 1$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$

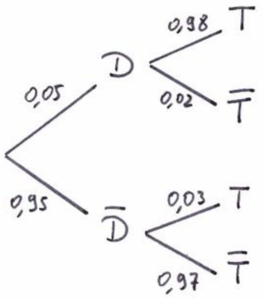
Comme le coefficient dominant du trinôme est positif, f'' est strict. positif sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Ex 2 :

→ Partie I

1)



2) ⓐ $P(D\cap T) = P(D)\times P_D(T) = 0{,}05\times 0{,}98 = \boxed{0{,}049}$

ⓑ D et $\overline{D}$ forment un système complet d'évènements,
Donc d'après la formule des probabilités totales,

$P(T) = P(D\cap T) + P(\overline{D}\cap T) = 0{,}049 + P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(T)$

$= 0{,}049 + 0{,}95\times 0{,}03$

$= 0{,}049 + 0{,}0285$

$= \boxed{0{,}0775}$

3) $P_T(D) = \dfrac{P(D\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}049}{0{,}0775} = \dfrac{490}{775} \boxed{= \dfrac{98}{155}} \simeq 0{,}63 < 0{,}95$

Donc $\boxed{\text{le test n'est pas efficace}}$

→ Partie II

1) On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "la pièce choisie est défectueuse" est $P(D) = 0{,}05$. Donc $\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;0{,}05)}$

2) $P(X\geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0}\times 0{,}05^0\times(1-0{,}05)^{20-0}$

$= 1 - 1\times 1\times 0{,}95^{20}$

$\boxed{\simeq 0{,}64}$ (à 10^{-2} près)

3) $E(X) = n\times p = 20\times 0{,}05 = 2\times 0{,}5 = \boxed{1}$

Ceci signifie que, sur un grand nombre de tirages, on observera en moyenne une pièce défectueuse sur 20 pièces tirées (avec remise).

Ex 3 :

→ Partie I

$\Delta T_{10} = 1,3 - (-19) = 1,3 + 19 = 20,3$ °C

Donc en 1 minute, la T° a augmenté de $\frac{20,3}{10} = 2,03$ °C

La T° peut donc être modélisée par la droite d'équation : $y = 2,03x - 19$

Ainsi, après 25 minutes, la T° des gâteaux serait de : $2,03 \times 25 - 19$

$T_{25} = 2,03 \times 25 - 19 = 50,75 - 19 = \boxed{31,75\text{°C}}$

Or $T_{ext} = 25$°C

On a ainsi $T_{25} > T_{ext}$, ce qui nous permet de conclure que

$\boxed{\text{ce modèle n'est pas pertinent.}}$

Remarque : Attention à ne surtout pas faire de produit en croix si on utilise un tableau représentant le tps et la T° :

Tps	0	10	25
T°	-19	1,3	31,75

La T° n'est pas linéaire (ne passe pas par (0;0)). Il n'y a pas proportionnalité, le produit en croix est interdit.

Par contre, on peut utiliser le produit en croix si on prend un tableau représentant le tps et la variation de T° :

Tps	10	25
ΔT°	20,3	50,75

L'augmentation de T° est linéaire. Il y a donc proportionnalité. le produit en croix est autorisé.

Il ne faut pas ensuite oublier d'ajouter la T° initiale : $T_{25} = T_{ini} + \Delta T_{25}$
$= -19 + 50,75 = 31,75$°C

→ Partie II

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06\ (T_n - 25)$

$\iff T_{n+1} = -0{,}06.T_n + 0{,}06 \times 25 + T_n$

$\iff \boxed{T_{n+1} = 0{,}94\, T_n + 1{,}5}$

2) $T_1 = 0{,}94 \times T_0 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-19) + 1{,}5 = -17{,}86 + 1{,}5 = -16{,}36\ \boxed{\simeq -16{,}4}$ °C

$T_2 = 0{,}94 \times T_1 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-16{,}36) + 1{,}5 = -13{,}8784\ \boxed{\simeq -13{,}9}$ °C

3) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant 25 \quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, $T_0 = -19 \leqslant 25 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n \leqslant 25$ et mq. $T_{n+1} \leqslant 25$

On a : $\underset{\text{HR}}{T_n \leqslant 25} \Rightarrow 0{,}94\,T_n \leqslant 0{,}94 \times 25 \Rightarrow 0{,}94\,T_n \leqslant 23{,}5$

$\Rightarrow 0{,}94\,T_n + 1{,}5 \leqslant 23{,}5 + 1{,}5$

$\Rightarrow T_{n+1} \leqslant 25 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant 25}$

Ceci était en effet prévisible car la température T_n des gâteaux ne peut pas excéder la $T_{extérieure} = 25$ °C.

4) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06\ (T_n - 25)$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant 25 \Rightarrow T_n - 25 \leqslant 0 \Rightarrow -0{,}06(T_n - 25) \geqslant 0 \Rightarrow T_{n+1} - T_n \geqslant 0$

Donc $\boxed{(T_n) \text{ est croissante.}}$

5) (T_n) est croissante et majorée (par 25), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(T_n) \text{ converge}}$ vers une limite $l \leqslant 25$

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = T_n - 25$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 . T_n + 1,5 - 25 = 0,94 \times T_n - 23,5$

$\iff U_{n+1} = 0,94 \times T_n - 0,94 \times 25 = 0,94(T_n - 25) = 0,94 \times U_n$

$$\boxed{\text{Donc } (U_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,94 \text{ et de premier terme } U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44}$$

b) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n = -44 \times 0,94^n$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$

$\iff \boxed{T_n = -44 \times 0,94^n + 25}$

c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$ limite d'une suite géométrique de raison $|q| < 1$

Puis par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$

Et par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 = \boxed{25}$

$\boxed{\text{La T° des gâteaux va donc tendre vers la T° extérieure.}}$

7)

a) $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \boxed{\simeq 18\ °C}$ (à 10° près)

b) (T_n) étant croissante, cherchons n tq $T_n \geqslant 10$

Il suffira ensuite de prendre l'intervalle d'entiers $[\![n-1 \,;\, n]\!]$

On veut $T_n \geqslant 10 \iff -44 \times 0{,}94^n + 25 \geqslant 10$

$$\iff -44 \times 0{,}94^n \geqslant -15$$

$$\iff 0{,}94^n \leqslant \frac{15}{44}$$

$$\iff \ln(0{,}94^n) \leqslant \ln\frac{15}{44}$$

$$\iff n.\ln 0{,}94 \leqslant \ln\frac{15}{44}$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln\frac{15}{44}}{\ln 0{,}94} \quad \text{car } \ln(0{,}94) < 0$$

or $\dfrac{\ln\frac{15}{44}}{\ln 0{,}94} \simeq 17{,}4$ et on veut $n \in \mathbb{N}$, donc $n = 18$

Cécile devra donc déguster son gâteau $\boxed{\text{entre la } 17^{\text{ème}} \text{ et la } 18^{\text{ème}} \text{ minute.}}$

Vérif : $T_{17} = -44 \times 0{,}94^{17} + 25 \simeq 9{,}6$ °C

$T_{18} = -44 \times 0{,}94^{18} + 25 \simeq 10{,}6$ °C

Rem : (T_n) étant croissante, on pouvait éventuellement éviter la résolution avec le logarithme en entrant la suite dans la calculatrice et en lisant l'intervalle voulu. La rédaction se limite alors à "(T_n) croissante" et à notre vérification.

c)
```
def seuil():
    n=0
    T=-19
    while T<10:
        T=0,94*T+1,5
    n=n+1
    return n
```

```
def seuil():
    n=0
    T=-19
    while T<10:
        T=0.94*T+1.5
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil()
18
```

Ex A :

Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $A\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $d(O;\vec{u})$

1) $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in d$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige d, donc :

$$\boxed{d : \begin{cases} t \\ t \\ 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

2) ⓐ Dans le R.O.N. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\-2\end{pmatrix}$

$$AM^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = (t-1)^2+(t-3)^2+(-2)^2 = t^2-2t+1+t^2-6t+9+4 = \boxed{2t^2-8t+14}$$

ⓑ On admet que AM est minimal lorsque AM^2 est minimal

Or AM^2 est une fonction polynôme du second degré, convexe car son coefficient dominant est positif, qui admet donc un minimum en $t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2\times 2} = 2$

D'où $M_0\begin{pmatrix}t_0\\t_0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{M_0\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}$

Rem 1 : On aurait pu utiliser la forme canonique de AM^2

$$AM^2 = 2t^2-8t+14 = 2(t^2-4t+7) = 2\left((t^2-4t+4)+3\right) = 2(t-2)^2+6$$

On obtient alors directement $t_0 = \alpha = 2$ et $\beta = 6$

Rem 2 : On a $AM^2 \geqslant \beta \Leftrightarrow AM^2 \geqslant 6 \Rightarrow AM \geqslant 6$ (6 étant la distance AM_0)

3) (AM_0) est dirigée par $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et d est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Puis dans le R.O.N. : $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = 1\times 1+(-1)\times 1+(-2)\times 0 = 1-1+0 = 0$

Donc $\overrightarrow{AM_0}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, impliquant que $\boxed{(AM_0) \text{ et } d \text{ sont orthogonales}}$

4) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{A'M_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires qui dirigent le plan $(AA'M_0)$. Puis :

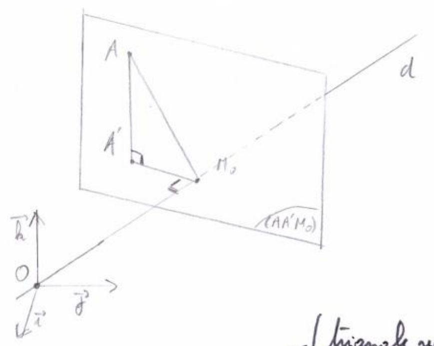
$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\overrightarrow{A'M_0} = 1\times1+1\times(-1)+0\times0 = 1-1+0=0 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AM_0} = 0 \quad \text{(cf question 3)} \end{cases}$$

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{A'M_0}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ non colinéaires dirigeant $(AA'M_0)$

D'où $\vec{u}$ est normal au plan $(AA'M_0)$

Comme $\begin{cases} M_0\in(AA'M_0) \\ \vec{u} \text{ dirige } d \\ O\in d \\ M_0\in d \end{cases}$ $\Rightarrow$ M_0 est le projeté orthogonal de O sur $(AA'M_0)$

D'où $\boxed{M_0 \text{ est le point de } (AA'M_0) \text{ le plus proche de } O}$



(cf fichier Geogebra)

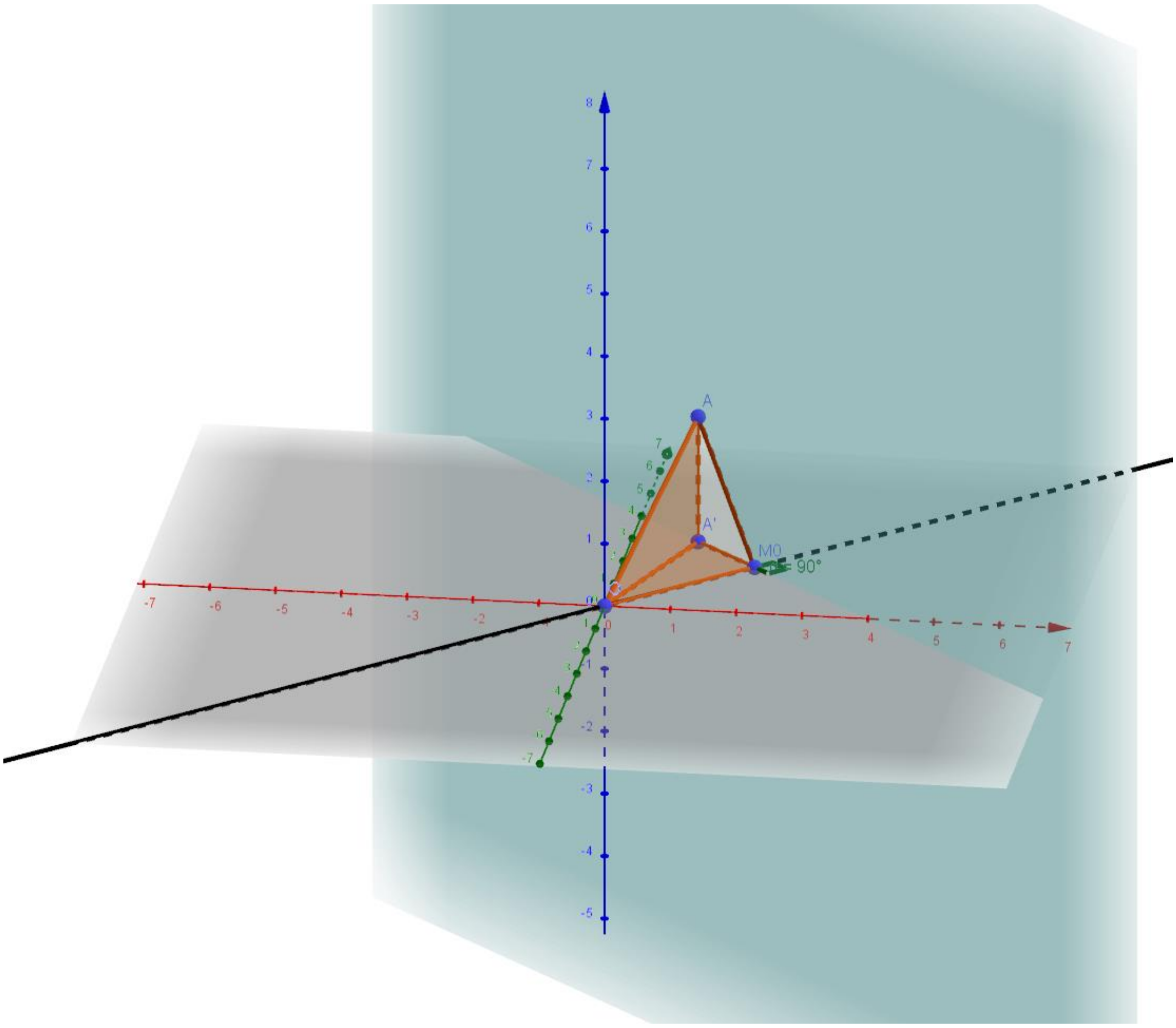
(triangle rectangle car A' est le proj. orth. de A sur $(OA'M_0)$)

5) La Pyramide $AA'M_0O$ a pour base $AA'M_0$ et pour hauteur $[OM_0]$

D'où $V_{OM_0A'A} = \frac{1}{3}\times \mathcal{A}_{AA'M_0}\times h = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times AA'\times A'M_0\right)\times OM_0$

Puis dans le R.O.N. : $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \text{ donc } AA'=2 \\ \overrightarrow{A'M_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ donc } A'M_0=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \text{ donc } OM_0=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \end{cases}$

Enfin, $V_{OM_0A'A} = \frac{1}{3}\times\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2} = \boxed{\frac{4}{3}}$ u.v.


A
A'
M0
90°

Ex B :

Soit (E) : $y' = y + 2x.e^x$

1) On admet que $u : x \mapsto x^2.e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x.e^x + x^2.e^x = (x^2+2x).e^x$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) + 2x.e^x = x^2.e^x + 2x.e^x = (x^2+2x).e^x = u'(x)$

La fonction u est donc bien une solution particulière de (E)

2) a) f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + 2x.e^x$

Puis la fonction $g = f - u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= f'(x) - u'(x) \\ &= \left(f(x) + 2x.e^x\right) - \left(u(x) + 2x.e^x\right) \\ &= f(x) + \cancel{2x.e^x} - u(x) - \cancel{2x.e^x} \\ &= f(x) - u(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{f \text{ sol. de (E)} \Rightarrow g \text{ sol. de } y' = y}$

b) On admet la réciproque donc : f sol. de (E) $\Leftrightarrow$ g sol. de $y' = y$

Puis g sol. de $y' = y$ donc g est de la forme : $g(x) = \lambda.e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

D'où (E) a pour solution :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + u(x) &= \lambda.e^x + x^2.e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \boxed{(x^2+\lambda).e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = x^2 . e^x$

ⓐ On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = (x^2 + 2x) . e^x$ (cf question 1)

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, on sait que u' est du signe de $x^2 + 2x = x(x+2)$

D'où le tableau de signes de u' :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ⓑ On déduit de la question précédente le tableau de variations de u :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$u(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$u(-2) = (-2)^2 . e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

$u(0) = 0^2 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$

Pour information : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 . e^x = 0^+$ (th. des croissances comparées)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

ⓒ La fct u' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ u''(x) = (2x+2).e^x + (x^2+2x).e^x = (x^2 + 4x + 2).e^x$

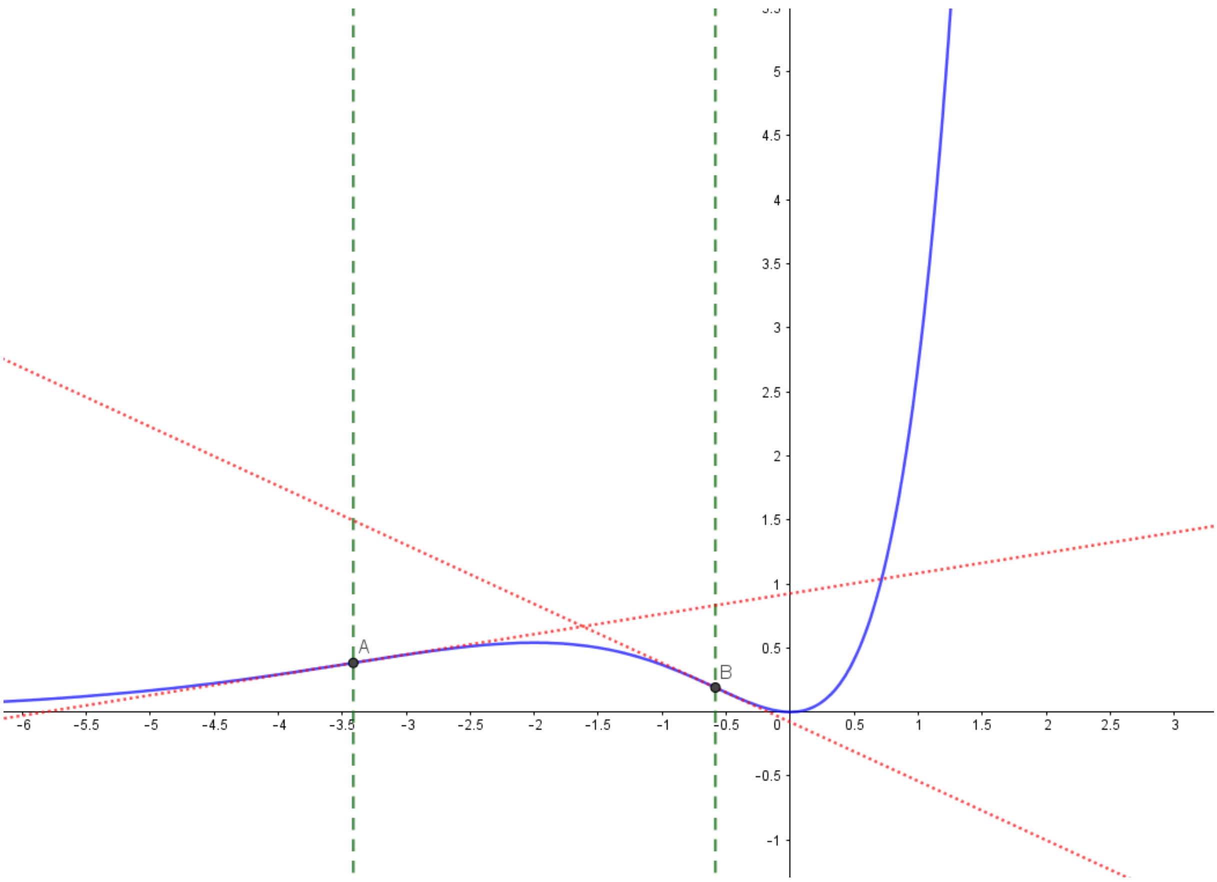
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ donc u'' est du signe de $x^2 + 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$

Etude du trinôme : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 8$ puis $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$u''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u		convexe	Inflex	concave	Inflex	convexe	

Le plus grand intervalle sur lequel u est concave est donc :

$\boxed{[-2-\sqrt{2}\ ;\ -2+\sqrt{2}]}$


A
B