Ex 1 :

1) a

La tangente a pour équation : $y = g'(1) \times (x-1) + g(1)$

On a : $g(1) = 1^2 + 2\times 1 - \frac{3}{1} = 1+2-3 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$ d'où $g'(1) = 2\times 1 + 2 + \frac{3}{1^2} = 2+2+3 = 7$

D'où la tangente a pour eq : $y = 7(x-1)+0 \iff y = 7(x-1) \iff y = 7x-7$

2) b

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}} = 3$

ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}} = 3$

3) c

Pour un tirage : loi de Bernoulli avec $p = \frac{6}{6+4} = 0,6$ si le succès est de tirer une boule noire

Pour 10 tirages avec remise : si X est la V.A. qui compte le nb de boules noires tirées, alors $X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}6)$

La question revient à calculer $P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0{,}6^4 \times 0{,}4^6 \simeq 0{,}1115$ à 10^{-4} près

4) b

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une F.I. du type " $\infty - \infty$ ", mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^x - x = x\left(3\frac{e^x}{x} - 1\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (th croissances comparées) puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$

Par produit, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\right) \times \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

5) b

Il y a 36^8 combinaisons possibles, puis comme le logiciel teste 10^8 combinaisons par seconde, il lui faudra : $\frac{36^8}{10^8} = 3{,}6^8 \simeq 28\,211$ secondes

$\simeq 7{,}83$ heures

$\simeq 7$ h 50 min

Ex 2 :

⟹ Partie A : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}98 . u_n + 250$ et $u_0 = 10\,560$

1) ⓐ On part de $u_0 = 10\,560$ panneaux

On enlève tous les ans 2% des panneaux, donc il reste :

$$u_n - 0{,}02 \times u_n = (1-0{,}02) \times u_n = 0{,}98 \times u_n$$

On rajoute ensuite 250 panneaux tous les ans, donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}98\, u_n + 250$ et $u_0 = 10560$

ⓑ On ne peut pas résoudre directement la question à la main car nous n'avons pas l'expression explicite de (u_n).

En saisissant la suite dans la calculatrice puis en visualisant le tableau de valeurs, on obtient $u_n > 12\,000 \iff n \geqslant 68$

car $u_{67} \simeq 11\,999$ et $u_{68} \simeq 12\,009$

Il faudra donc attendre $\boxed{68 \text{ ans}}$

ⓒ

```
u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0.98 * u + 250
    n = n + 1
```

```
1 u=10560
2 n=0
3 while u<=12000:
4     u=0.98*u+250
5     n=n+1
```

```
>>> n
68
```

Rem : la valeur "68" est stockée dans la variable n mais n'apparait pas automatiquement dans la console. Pour la visualiser, il faut taper "n" ⊕ Entrée. La visualisation peut se faire automatiquement en rajoutant un "print(n)" en ligne 7 sans alinéa (sinon s'afficheront toutes les valeurs de $[\![1;68]\!]$), mais ce n'était pas l'objet de la question.

2) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 12500$ $\quad \mathcal{P}(n)$

<u>Initialisation :</u> Pour $n=0$, $u_0 = 10560 \leqslant 12500 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant 12500$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant 12500$

On a $u_n \leqslant 12500$ (HR) $\Rightarrow 0{,}98\, u_n \leqslant 0{,}98 \times 12500$

$\Rightarrow 0{,}98\, u_n \leqslant 12\,250$

$\Rightarrow 0{,}98\, u_n + 250 \leqslant 12\,250 + 250$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant 12500 \quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 12500}$

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 0{,}98\, u_n + 250 - u_n = -0{,}02\, u_n + 250$

Or d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 12500$

D'où $-0{,}02 . u_n \geqslant -0{,}02 \times 12500$

$\Rightarrow -0{,}02 . u_n \geqslant -250$

$\Rightarrow -0{,}02 . u_n + 250 \geqslant -250 + 250$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

4) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 12500), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite réelle ℓ telle que $\ell \leqslant 12500$.

5) Soit (v_n) tq : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 12500$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 12500$
$= 0,98 u_n + 250 - 12500$
$= 0,98\ u_n - 12250$
$= 0,98\ u_n - 0,98 \times 12500$
$= 0,98\ (u_n - 12500)$
$= 0,98 . v_n$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,98 \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940}$

ⓑ D'après la question précédente,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 . q^n = -1940 \times 0,98^n}$

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 12500$

$\Leftrightarrow u_n = v_n + 12500$
$\Leftrightarrow \boxed{u_n = -1940 \times 0,98^n + 12500}$

ⓓ On a $0,98 \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$

Puis par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -1940 \times 0,98^n = 0$

Et par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12500}$

Interprétation : A très long terme, la centrale solaire de Big Sun possédera 12500 panneaux solaires

⇒ Partie B : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \,, \quad f(x) = 12500 - 500.e^{-0{,}02x+1{,}4}$

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée puis somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \,, \quad f'(x) = -500 \times (-0{,}02) \times e^{-0{,}02x+1{,}4} = 10.e^{-0{,}02x+1{,}4} > 0$

Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$

2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}02.x = -\infty$ puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}02x+1{,}4 = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$, on obtient par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}02x+1{,}4} = 0^+$

Les règles opératoires sur les limites nous donnent ensuite :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(12500 - 500\,e^{-0{,}02x+1{,}4}\right) = 12500 - 500 \times \lim_{x \to +\infty} e^{-0{,}02x+1{,}4}$$

$$= 12500 - 500 \times 0$$

$$= 12500$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 12500}$

3) On veut : $f(x) > 12\,000 \iff 12500 - 500\,e^{-0{,}02x+1{,}4} > 12\,000$

$$\iff 500\,e^{-0{,}02x+1{,}4} < 500$$

$$\iff e^{-0{,}02x+1{,}4} < 1$$

$$\iff e^{-0{,}02x+1{,}4} < e^{0}$$

$$\iff -0{,}02x + 1{,}4 < 0$$

$$\iff -0{,}02x < -1{,}4$$

$$\iff x > \frac{-1{,}4}{-0{,}02}$$

$$\iff x > 70$$

Il faudra donc attendre $\boxed{71 \text{ ans}}$

Ex3 :

⇒ Partie A : $a = \frac{2}{3}$

1) Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a : $\boxed{F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; I\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix}1\\1\\2/3\end{pmatrix}}$

2) On a $\vec{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-1/3\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

La droite (d) passe par I et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{FJ}$

D'où $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} + 3t \\ z = \frac{1}{2} - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$

Remarque : On pouvait conserver $\vec{FJ}$ pour vecteur directeur : $(d) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
mais nous avons choisi la représentation ci-dessus pour simplifier les calculs.

3) ⓐ Par construction, le point d'intersection de (d) et de (AE) est le point de (d) d'ordonnée nulle : $y = 0$ car $K \in (AE)$

D'où $y_K = 0 \iff \frac{1}{2} + 3t_K = 0 \iff t_K = -\frac{1}{6}$

Puis $z_K = \frac{1}{2} - t_K = \frac{1}{2} - \frac{-1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{K\begin{pmatrix}0\\0\\2/3\end{pmatrix}}$

ⓑ Par construction, L est le point de (d) d'ordonnée $y = 1$ car $L \in (DH)$

D'où $y_L = 1 \iff \frac{1}{2} + 3t_L = 1 \iff t_L = \frac{1}{6}$

Puis $z_L = \frac{1}{2} - t_L = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{L\begin{pmatrix}0\\1\\1/3\end{pmatrix}}$

Rem : Comme K et L sont sur (d) et symétriques par rapport au point I que nous avons pris pour origine de la représentation paramétrique de (d), il est logique que les paramètres de K et de L soient opposés : $t_L = -t_K$

4) a) On a dans le R.O.N. : $K\begin{pmatrix}0\\0\\2/3\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}0\\1\\1/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\-1/3\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-1/3\end{pmatrix}$ d'après la question 2)

On a $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{FJ}$ donc $\boxed{\text{FJLK est un parallélogramme}}$

Rem : D'autres solutions étaient envisageables, comme vérifier que $\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{FJ}$, ou que [FL] et [JK] ont même milieu, ou encore que $FJ = KL$ et $JL = FK$

b) On a $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{JK} = -1\times(-1) + 1\times(-1) + \left(-\frac{2}{3}\right)\times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{FL} \perp \overrightarrow{JK}$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires donc

$\boxed{\text{FJLK est un losange.}}$

Rem : On pouvait aussi vérifier que deux côtés consécutifs quelconques du parallélogramme FJLK ont même longueur, ce qui permettait de conclure.
Par ailleurs, ceux qui avaient choisi dans la question a) de vérifier que $FJ = KL$ et $JL = FK$ ont trouvé immédiatement que FJLK est un losange car $FJ = KL = JL = FK = \frac{\sqrt{10}}{3}$

c) On a $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1/3\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{FK} = 0\times(-1) + 1\times 0 + \left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 + 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \neq 0$

Donc l'angle $\widehat{KFG}$ n'est pas droit

Et ainsi $\boxed{\text{FJLK n'est pas un carré.}}$

Rem : On pouvait également utiliser la réciproque (en réalité la contraposée dans notre cas) du théorème de Pythagore pour conclure.

$\Rightarrow$ Partie B : On a $K\begin{pmatrix}0\\0\\1-\frac{a}{2}\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{a}{2}\end{pmatrix}$ avec $a \in [0;1]$

1) On a la relation : $\overrightarrow{CJ} = a.\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_J-1\\y_J-1\\z_J-0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{J\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}}$

2) On a $\begin{cases}\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}x_J-x_F\\y_J-y_F\\z_J-z_F\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\a-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}x_L-x_K\\y_L-y_K\\z_L-z_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\\\frac{a}{2}-\left(1-\frac{a}{2}\right)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}\end{cases}$

On voit que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$ donc $\boxed{\text{FJLK est un parallélogramme}}$

3) On a $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{a}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1-\frac{3a}{2}\end{pmatrix}$

On veut $\overrightarrow{FL}\cdot\overrightarrow{JK} = 0 \Leftrightarrow (-1)\times(-1) + 1\times(-1) + \left(\frac{a}{2}-1\right)\left(1-\frac{3a}{2}\right) = 0$

⚠ Eviter de développer le produit

$\Leftrightarrow \cancel{1-1} + \left(\frac{a}{2}-1\right)\left(1-\frac{3a}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2}-1 = 0$ ou $1-\frac{3a}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1$ ou $\frac{3a}{2} = 1$

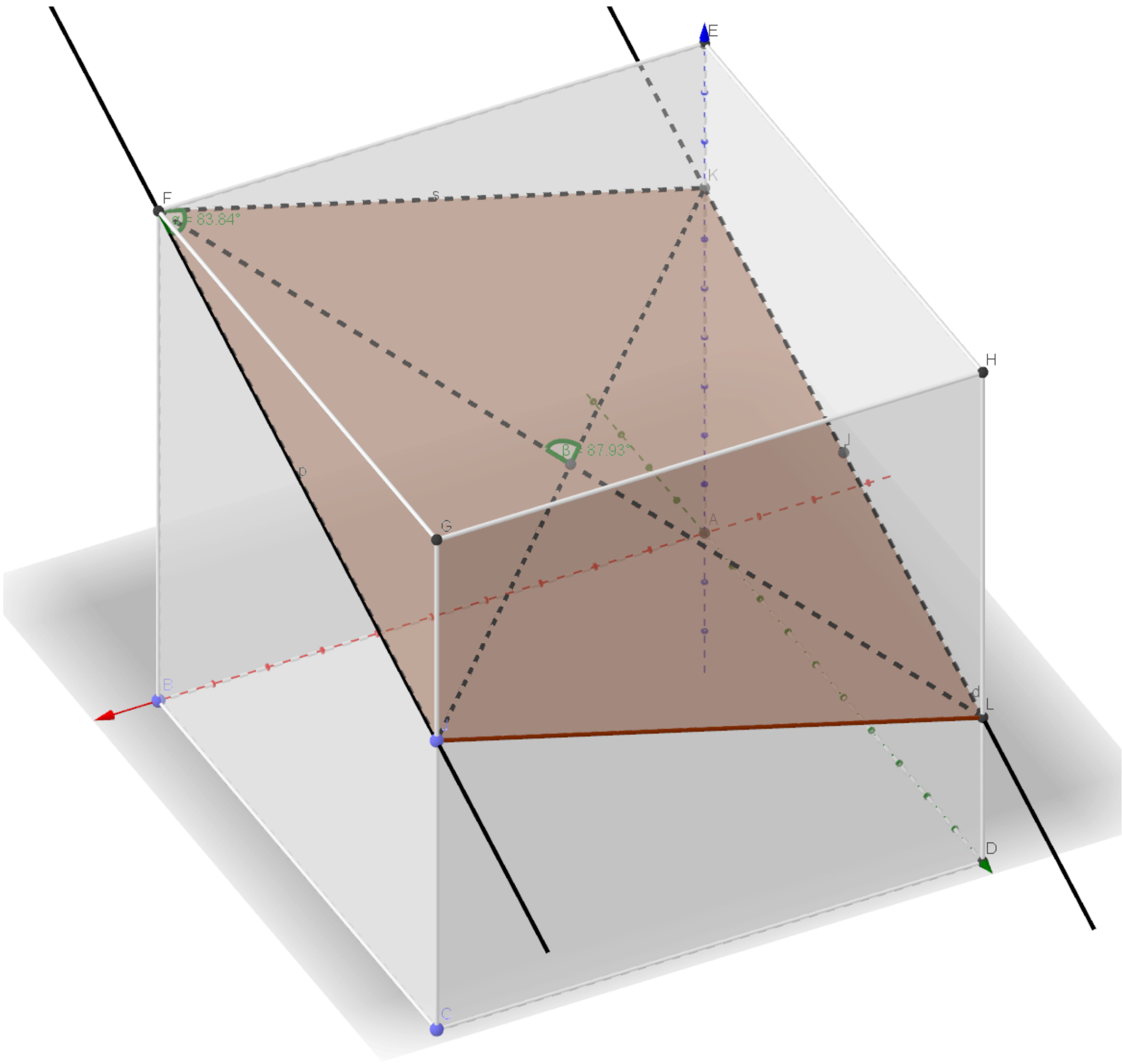
$\Leftrightarrow a = 2$ ou $a = \frac{2}{3}$

On $a \in [0;1]$ donc $\boxed{\text{la seule solution est } a = \frac{2}{3}}$

Ceci correspond au cas étudié dans la partie A

4) Dans la partie A, nous avons montré que lorsque $a = \frac{2}{3}$, FJLK n'est pas un carré. Or comme un carré est un losange particulier, aucune autre valeur de a ne peut convenir.

Donc $\boxed{\text{il n'existe pas de valeur de a telle que FJLK soit un carré.}}$



Voir le fichier Geogebra en pièce jointe pour faire évoluer le polygone $FJLK$ en fonction de a

Ex A :

⇒ Partie A :

1) * Si le test du mélange est négatif, on ne fait pas de test supplémentaire, donc $X_n = 1$

* Si le test du mélange est négatif, on fait n tests supplémentaires puisqu'on teste alors chacune des n personnes, donc $X_n = n+1$

Finalement, $\boxed{X_n(\Omega) = \{1 \,;\, n+1\}}$

2) La probabilité qu'un individu soit sain est $1-0{,}05 = 0{,}95$

Puis l'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé lorsque aucun individu n'est malade.

Comme il y a n individus, la probabilité que tous soient sains est donc : $\boxed{P(X_n = 1) = 0{,}95^n}$

Puis par passage à l'événement contraire : $\boxed{P(X_n = n+1) = 1 - 0{,}95^n}$

D'où la loi de X_n :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$	$0{,}95^n$	$1-0{,}95^n$

3) L'espérance de X_n représente ici le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon de n personnes.

$$E(X_n) = \sum_i \left(x_i \, P(X_n = x_i)\right) = 1 \times 0{,}95^n + (n+1) \times (1 - 0{,}95^n)$$

$$= \cancel{0{,}95^n} + n - 0{,}95^n \times n + 1 - \cancel{0{,}95^n}$$

$$= \boxed{n(1 - 0{,}95^n) + 1}$$

$$= \boxed{n + 1 - n \times 0{,}95^n}$$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall x \in [20;+\infty[$, $f(x) = \ln(x) + x.\ln(0,95)$

1) La fonction f est dérivable sur $[20;+\infty[$ comme somme de fcts dérivables sur $[20;+\infty[$

$\forall x \in [20;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0,95)$

Puis $f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{x} + \ln(0,95) \geqslant 0$ et $x \geqslant 20$

$\iff \frac{1}{x} \geqslant -\ln(0,95)$ et $x \geqslant 20$

$\iff x \leqslant \frac{-1}{\ln(0,95)}$ et $x \geqslant 20$

Comme $\frac{-1}{\ln(0,95)} \simeq 19,5$, l'inéquation précédente n'admet pas de solution.

D'où $\forall x \in [20;+\infty[$, $f'(x) < 0$

Donc $\boxed{f \text{ est (strictement) décroissante sur } [20;+\infty[}$

2) Comme $\ln(0,95) < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\infty - \infty$"

Puis $\forall x \geqslant 20$, $f(x) = \ln(x) + x \times \ln(0,95)$

$= x \times \frac{\ln x}{x} + x \times \ln(0,95)$

$= x\left(\frac{\ln x}{x} + \ln(0,95)\right)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (th. croissances comparées)

Puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \ln(0,95) = \ln(0,95) < 0$

Enfin, par produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

3) La fonction f est <u>continue</u> (car dérivable) et <u>strictement</u> décroissante sur $[20;+\infty[$

On a $f(20) = \ln(20) + 20 \times \ln(0,95) \simeq 1,97 > 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Donc $f\left([20;+\infty[\right) =]-\infty\,;\, f(20)]$

Comme $0 \in]-\infty\,;\, f(20)]$, alors d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution a.

Par balayage, on obtient : $\boxed{a \in]87,0\,;\, 87,1[}$

car $f(87,0) > 0$ et $f(87,1) < 0$

<u>Rem 1 :</u> On aurait pu utiliser le corollaire du th. de Bolzano

<u>Rem 2 :</u> Dans le cadre de cette question, on demandait de prouver l'unicité et pas seulement l'existence de a. Ainsi, la propriété de "décroissance" démontrée à la question B.1) était insuffisante. Il nous fallait une <u>stricte</u> décroissance (que nous avions déjà démontrée)

4) D'après les questions précédentes, on a :

x	20		a		$+\infty$
variations de f	$f(20)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de f		$+$	0	$-$	

⇒ Partie C :

$$E(X_n) < n \iff \cancel{n} + 1 - n \times 0{,}95^n < \cancel{n}$$

$$\iff n \times 0{,}95^n > 1$$

par stricte croissance de ln sur $[20 ; +\infty[$

$$\iff \ln\left(n \times 0{,}95^n\right) > \ln 1$$

$$\iff \ln(n) + \ln\left(0{,}95^n\right) > 0$$

$$\iff \ln(n) + n \cdot \ln(0{,}95) > 0$$

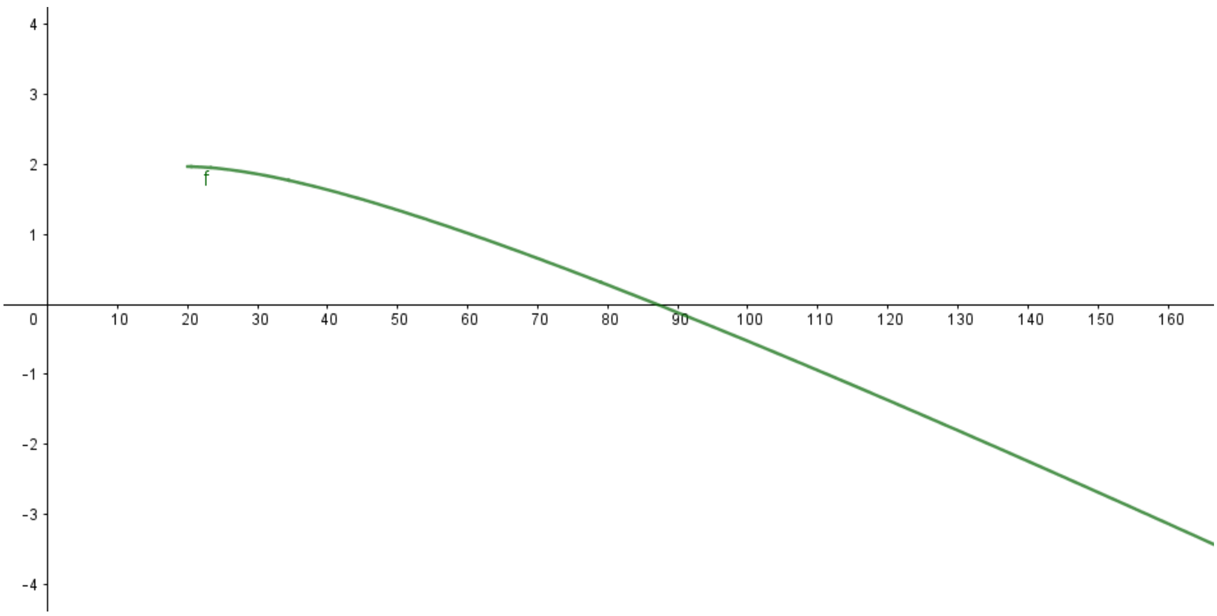
cf partie B

$$\iff f(n) > 0$$

D'après B.4)

$$\iff \boxed{n \in [20 ; a[}$$

Comme la première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$ et que $a \in \left]87{,}0 ; 87{,}1\right[$, on en déduit que **la première méthode est à favoriser pour les échantillons comportant au maximum 87 personnes.**



Ex B :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x} + a.x + b.e^{-x}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

1) On lit $\boxed{f(0) = 3}$

Puis $f'(0)$ est le coeff. directeur de la tangente T, qui passe par les points de coordonnées $\binom{0}{3}$ et $\binom{1}{1}$

Donc $f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-1}{0-1} = \dfrac{2}{-1} = \boxed{-2}$

2) On a : $f(0) = e^{0} + a \times 0 + b \times e^{-0}$

$\iff 3 = 1 + 0 + b \times 1$

$\iff \boxed{b = 2}$

3) ⓐ On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) = e^{x} + ax + 2e^{-x}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{x} + a - 2e^{-x}}$

ⓑ On a alors $f'(0) = e^{0} + a - 2e^{-0} = 1 + a - 2 \times 1 = \boxed{a - 1}$

ⓒ On a : $f'(0) = -2 \iff a - 1 = -2 \iff \boxed{a = -1}$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}}$

4) Soit (E) : $y' + y = 2e^{x} - x - 1$

ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}$ (on remarque que $g = f$)

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{x} - 1 - 2e^{-x}$

Puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + g(x) = e^x - 1 \cancel{-2e^{-x}} + e^x - x \cancel{+2e^{-x}} = 2e^x - x - 1$

Donc $\boxed{g \text{ est solution de } (E)}$

(b) On résout l'équation homogène : $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Les solutions sont de la forme : $\boxed{h(x) = \lambda . e^{-x} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

(c) En utilisant les questions précédentes, on somme les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E) et la solution particulière obtenue à la question 4.(a). On trouve pour solution générale :

Les fonctions de la forme : $\boxed{x \longmapsto \lambda e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x} \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ <u>Partie B :</u>

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x - 2)(e^x + 1) = (e^x)^2 + e^x - 2e^x - 2 = \boxed{e^{2x} - e^x - 2}$

2) D'après la question A.4.(a),

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} = e^{-x}\left(e^{2x} - e^x - 2\right) = \boxed{e^{-x}(e^x - 2)(e^x + 1)}$

3) on a : $\forall x \in [1 ; +\infty[\ , \begin{cases} e^{-x} > 0 \\ e^x - 2 > 0 \quad \text{(admis)} \\ e^x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$ sur $[1 ; +\infty[$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [1 ; +\infty[}$