Ex 1 :

1) ⓑ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x . e^{-2x}$ La fct f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée aussi

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2) . e^{-2x} = (-2x+1)\, e^{-2x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2 . e^{-2x} + (-2x+1) \times (-2) \times e^{-2x} = (4x-4)\, e^{-2x} = 4(x-1)\, e^{-2x}$

2) ⓒ $\binom{12}{3} = \dfrac{12!}{3!\,(12-3)!} = \dfrac{12!}{3 \times 2 \times 9!} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{12}} \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\underset{1}{\cancel{6}} \times \cancel{9!}} = 220$

3) ⓑ Attention, il s'agit du graphe de f' :

x	0		2		5		7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

4) ⓑ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\iff P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

loi de "de Morgan"

On a $P(A) = 0{,}028$; $P(B) = 0{,}022$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}954$

D'où $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$

Donc $P(A \cap B) = 0{,}028 + 0{,}022 - 0{,}046 = 0{,}004$

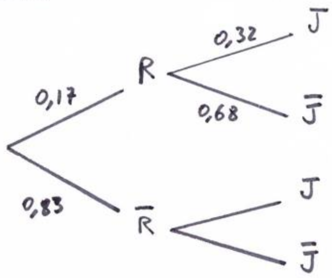
5) ⓑ Il suffit de "remonter" le tableau de variations"

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Ex 2 :

=> Partie A :

1)



2) $P(R\cap J) = P(R)\times P_R(J) = 0,17\times 0,32 \boxed{= 0,0544 \simeq 0,054 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

3) On donne $P(J) = 0,11$

Comme $\{R ; \bar{R}\}$ forme un système complet d'événements,

D'après la formule des probabilités totales,

$P(J) = P(R\cap J) + P(\bar{R}\cap J)$

$\Leftrightarrow P(\bar{R}\cap J) = P(J) - P(R\cap J) = 0,11 - 0,0544 \boxed{= 0,0556 \simeq 0,056 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

4) $P_{\bar{R}}(J) = \dfrac{P(\bar{R}\cap J)}{P(\bar{R})} = \dfrac{0,0556}{0,83} \boxed{\simeq 0,067 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

=> Partie B :

1) On répète 50 fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès " la personne utilise régulièrement les transports en commun " est de $P(R) = 0,17$

Donc X suit la loi Binomiale : $\boxed{X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,17)}$

2) $P(X=5) = \binom{50}{5}\times 0,17^5\times(1-0,17)^{50-5} = \binom{50}{5}\times 0,17^5\times 0,83^{45} \boxed{\simeq 0,069 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

La probabilité qu'exactement 5 personnes sur les 50 interrogées prennent les transports en commun est d'environ 0,069

3) Le recenseur affirme que $P(X<13) > 0,95$

On a $P(X<13) = P(X\leqslant 12) \simeq 0,929 < 0,95$ donc $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$

4) $E(X) = n\times p = 50\times 0,17 = 5\times 1,7 = \boxed{8,5}$

Ex 3 :

⟹ Partie A :

1) $a_1 = 0,85 \cdot a_0 + 450 = 0,85 \times 200 + 450 = 2 \times 85 + 450 = 170 + 450 = \boxed{620}$

2) Au mois $n+1$, 85% des collaborateurs qui travaillaient à domicile le mois n continuent : $0,85 . a_n$. De plus, chaque mois, il faut ajouter 450 nouveaux collaborateurs qui optent pour le travail à domicile : $+450$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0,85 . a_n + 450}$

3) ⓐ On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n - 3000$

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85 a_n + 450 - 3000 = 0,85 a_n - 2550$

$= 0,85 a_n - 0,85 \times 3000 = 0,85(a_n - 3000) = 0,85 . v_n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0,85 v_n$ donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0,85}$

ⓑ On a : $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

et (v_n) géométrique de raison $q = 0,85$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \cdot q^n = \boxed{-2800 \times 0,85^n}$

ⓒ On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n - 3000$

$\iff a_n = v_n + 3000$

$\iff \boxed{a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000}$

4) On veut $a_n > 2500 \iff -2800 \times 0{,}85^n + 3000 > 2500$

$\iff -2800 \times 0{,}85^n > -500$

car $-2800 < 0$

$\iff 0{,}85^n < \frac{-5\cancel{00}}{-28\cancel{00}}$

$\iff 0{,}85^n < \frac{5}{28}$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(0{,}85^n) < \ln\left(\frac{5}{28}\right)$

$\iff n . \ln(0{,}85) < \ln\left(\frac{5}{28}\right)$

car $\ln(0{,}85) < 0$

$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0{,}85)}$

On a : $\frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0{,}85)} \simeq 10{,}6$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Donc le nb de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 au bout de $\boxed{\text{11 mois.}}$

$\Rightarrow$ Partie B : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$ et $u_0 = 1$

1) Soit la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

La fonction rationnelle f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{5(x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{5x} + 10 - \cancel{5x} - 4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

Rem : La fonction f est une fonction "homographique". Il s'agit d'un cas particulier de fonctions rationnelles : c'est un quotient de deux fcts affines.

2) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ $\quad \mathcal{P}(n)$

<u>Initialisation :</u> Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times u_0 + 4}{u_0+2} = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4 \implies \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ et mq : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

On a : $\underbrace{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}_{HR} \underset{\text{car } f \text{ est strict croissante sur } \mathbb{R}_+}{\implies} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$

⚠ Ne pas oublier de le préciser

Or $\begin{cases} f(0) = \dfrac{5\times 0+4}{0+2} = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0 \\ f(u_n) = u_{n+1} \\ f(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ f(4) = \dfrac{5\times 4+4}{4+2} = \dfrac{24}{6} = 4 \end{cases}$

D'où $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4) \implies 0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

$\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}$

b) D'après la question précédente :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \implies (u_n) \text{ est croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 4 \implies (u_n) \text{ est majorée (par 4)} \end{cases}$

Donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite $\ell \leqslant 4$.

3) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ limite d'une suite géométrique de raison q tq $|q|<1$

Puis par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes (th. d'encadrement), on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4 - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4}$

Dans le contexte de la modélisation, ce résultat signifie que sur les 5000 collaborateurs de l'entreprise, le nombre de satisfaits va tendre vers 4000.

Ex A:

1) Dans le R.O.N., on a $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-2)+0\times 5+2\times 1 = -2+0+2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Ainsi, $\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en A}}$

(Rem : On pouvait également utiliser la réciproque du th. de Pythagore après avoir calculé les normes de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$)

2) ⓐ Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 1+1\times 0+(-1)\times 2 = 2+0-2 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-2)+1\times 5+(-1)\times 1 = -4+5-1 = 0 & \text{donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires dirigeant (ABC), on peut conclure que $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à (ABC)}}$

ⓑ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (ABC) \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

$$\iff 2(x-2)+1\times(y+1)+(-1)\times(z-0) = 0$$

$$\iff 2x-4+y+1-z = 0$$

$$\iff \boxed{2x+y-z-3=0}$$

ⓒ $2x_S + y_S - z_S - 3 = 2\times 0+1-4-3 = -6 \neq 0$

Donc $S\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \notin (ABC)$

D'où les points $\boxed{\text{A ; B ; C et S ne sont pas coplanaires}}$

3) a) $(d) \perp (ABC)$ donc $\vec{n}$ dirige (d), car $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

De plus, $S\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \in (d)$

D'où $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}}$

b) Comme $(d) \perp (ABC)$, (d) et (ABC) ont un unique pt d'intersection

Vérifions que $H\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \in (d)$: $\begin{cases} 2 = 2t \\ 2 = 1+t \\ 3 = 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow$ $H\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ est le pt de (d) de paramètre $t=1$

Vérifions que $H\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \in (ABC)$: $2x_H + y_H - z_H - 3 = 2\times2+2-3-3 = 6-6 = 0$

donc $H\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \in (ABC)$

Ainsi, $\boxed{(d) \cap (ABC) = \left\{ H\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \right\}}$

4) $V_{SABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times HS$ car d'après les questions précédentes, H est le projeté orthogonal de S sur (ABC)

Le triangle ABC est rectangle en A donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ AC = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-2)^2+5^2+1^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30} \\ HS = \sqrt{\overrightarrow{HS}^2} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \end{cases}$$

D'où $V_{SABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{30} \times \sqrt{6} = \frac{1}{\cancel{6}} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cancel{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \boxed{5}$ u.v.

5) ⓐ Dans le R.O.N., $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Donc $SA = \|\overrightarrow{SA}\| = \sqrt{\overrightarrow{SA}^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6}}$

ⓑ On donne $SB = \sqrt{17}$ et on a $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$

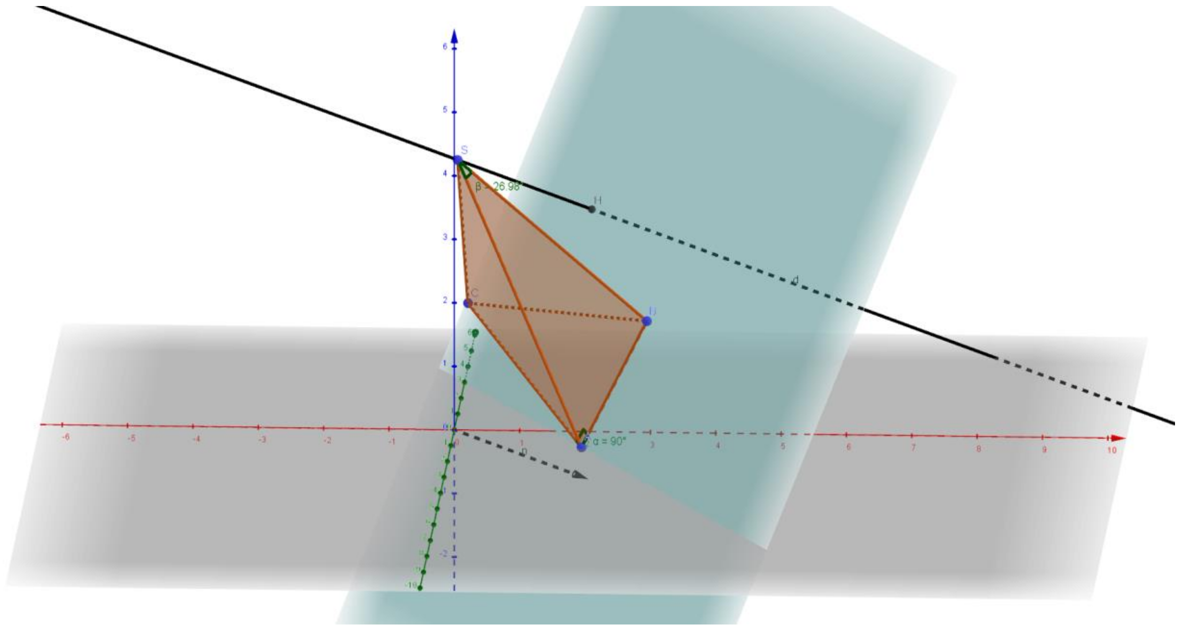
$\Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{ASB}) = \dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{SA \times SB} = \dfrac{2\times 3 + (-2)\times(-2) + (-4)\times(-2)}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{ASB}) = \dfrac{6+4+8}{2\sqrt{102}} = \dfrac{18}{2\sqrt{102}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$

Puis $\widehat{ASB} = \cos^{-1}\left(\dfrac{9}{\sqrt{102}}\right) \boxed{\simeq 27,0°}$ à 10^{-1} près

⚠ Ne pas oublier la décimale

⚠ Conserver la valeur exacte dans les calculs intermédiaires



Ex B :

⇒ Partie A : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$

1) On admet dans l'énoncé que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2 \times \frac{-1}{3} \times e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{-2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-\frac{1}{3}x}\right)$

Puis $g'(x) \geqslant 0 \iff \frac{2}{3}\left(1 - e^{-\frac{1}{3}x}\right) \geqslant 0$

$$\iff 1 - e^{-\frac{1}{3}x} \geqslant 0$$
$$\iff e^{-\frac{1}{3}x} \leqslant 1$$
$$\iff e^{-\frac{1}{3}x} \leqslant e^{0}$$
$$\iff -\frac{1}{3}x \leqslant 0$$
$$\iff x \geqslant 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

$$g(0) = 2 \times e^{-\frac{1}{3}\times 0} + \frac{2}{3} \times 0 - 2 = 2 \times e^{0} + 0 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0$$

3) g admet pour minimum 0 en 0 donc :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}}$$

⇒ Partie B :

1) On a : $(E) \Leftrightarrow 3y' + y = 0 \Leftrightarrow 3y' = -y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}y$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants, donc (E) admet pour solution générale :

$\boxed{h_\lambda(x) = \lambda e^{-\frac{1}{3}x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

2) On veut que $h_\lambda(0) = 2 \Leftrightarrow \lambda . e^{-\frac{1}{3}\times 0} = 2 \Leftrightarrow \lambda . e^0 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$

La solution particulière recherchée est donc $\boxed{h(x) = 2 . e^{-\frac{1}{3}x}}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 2 . e^{-\frac{1}{3}x}$ On remarque que $f = h$

ⓐ La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $M\binom{0}{2}$ a pour équation :

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

On a : $f(x_M) = f(0) = 2 . e^{-\frac{1}{3}\times 0} = 2 \times e^0 = 2 \times 1 = 2 = y_M$ donc $M \in \mathcal{C}_f$

Puis f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 2 \times \frac{-1}{3} \times e^{-\frac{1}{3}x} = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x}$ D'où $f'(0) = -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{1}{3}\times 0} = -\frac{2}{3}$

Ainsi ; Δ_0 a pour équation : $\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 2}$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) - y_{\Delta_0} = 2e^{-\frac{1}{3}x} - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2 = g(x)$

Or d'après la question A.3), $\forall x \in \mathbb{R}^*, \; g(x) > 0$ et $g(0) = 0$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \Delta_0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf en } 0 \text{ où il y a intersection (point M)}}$

⇒ Partie C :

1) On a $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f$ et Δ_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A

D'où $\forall a \in \mathbb{R}$, Δ_a : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

$\iff y = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}a}(x-a) + 2e^{-\frac{1}{3}a}$

Puis $P \in \mathcal{C}_f \cap (O;\vec{i}) \iff -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}a}(x-a) + 2e^{-\frac{1}{3}a} = 0$

$\iff 2e^{-\frac{1}{3}a}\left(-\frac{1}{3}(x-a)+1\right) = 0$

$\iff -\frac{1}{3}(x-a)+1 = 0$ car $2e^{-\frac{1}{3}a} > 0$

$\iff -(x-a)+3 = 0$

$\iff x - a = 3$

$\iff x = a+3$ Donc $\boxed{P\begin{pmatrix} a+3 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Rem : En nommant $A'\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ sur $(O;\vec{i})$,

on a $\overrightarrow{A'P}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $AP = 3$ (voir fichier Geogebra en PJ)

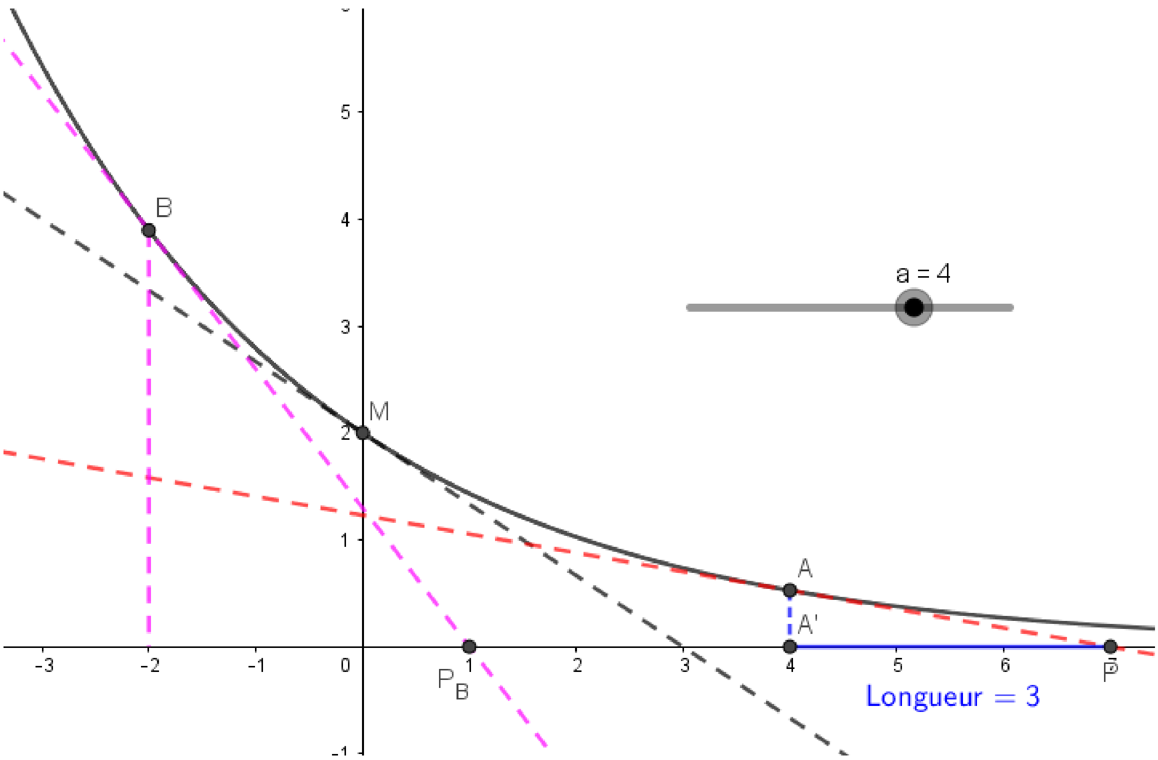
On dit que $\mathcal{C}_f$ a une sous-tangente constante (de longueur 3)

2) D'après la question précédente, Δ_{-2} passe par $B\begin{pmatrix} -2 \\ f(-2) \end{pmatrix}$ et par $P_B\begin{pmatrix} -2+3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il suffit donc de tracer la droite qui passe par :

→ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 (point B)

→ le point de $(O;\vec{i})$ d'abscisse $-2+3=1$ (point P_B)


a = 4
B
M
A
A'
P
P_B
Longueur = 3