Ex1 :

1) $u_1 = u_0 - \frac{10}{100} \times u_0 + 250 = 1000 - 0{,}1 \times 1000 + 250 = 1000 - 100 + 250$
$= \boxed{1150}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100} \cdot u_n + 250 = (1 - 0{,}1) \cdot u_n + 250 = \boxed{0{,}9\, u_n + 250}$

3) "suite(10)" renvoie la valeur de u_{10}, c'est-à-dire environ 1977.

Ceci signifie qu'au bout de 10 ans, en 2030, l'influenceuse aura environ 1977 abonnés à son profil.

→ Explication de la condition de la boucle "for" :

L'instruction "range(n)" signifie "range(0, n)"

L'instruction "range" possédant toujours une borne supérieure ouverte, il y a donc $(n-1) - 0 + 1 = n$ itérations dans la boucle.

Le "i" n'intervenant pas dans l'expression à l'intérieur de la boucle, il ne sert qu'à définir le nombre d'itérations à effectuer.

On aurait donc pu remplacer "range(n)" par "range(1, n+1)"

```python
def suite(n):
    u=1000
    for i in range(n):
        u=0.9*u+250
    return u

def suite2(n):
    u=1000
    for i in range(1,n+1):
        u=0.9*u+250
    return u
```

```
>>> suite(10)
1976.98233985

>>> suite2(10)
1976.98233985
```

4)

a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2500$ $\quad \mathcal{P}(n)$

<u>Initialisation :</u> Pour $n=0$, $u_0 = 1000 \leqslant 2500$ $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant 2500$ et mq $u_{n+1} \leqslant 2500$

On a : $\underset{\text{HR}}{u_n \leqslant 2500} \Rightarrow 0{,}9\,u_n \leqslant 0{,}9 \times 2500$

$\Rightarrow 0{,}9\,u_n \leqslant 2250$

$\Rightarrow 0{,}9\,u_n + 250 \leqslant 2250 + 250$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant 2500$ $\quad \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>conclusion :</u>

$\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2500}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}9\,u_n + 250 - u_n = -0{,}1\,u_n + 250$

Or d'après la question précédente, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2500 \Rightarrow -0{,}1\,u_n \geqslant -250 \Rightarrow -0{,}1\,u_n + 250 \geqslant 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

c) D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée (par 2500), donc d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 2500$

5)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_n - 2500$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = u_{n+1} - 2500$

$= 0{,}9\, u_n + 250 - 2500$

$= 0{,}9\, u_n - 2250$

$= 0{,}9\, u_n - 0{,}9 \times 2500$

$= 0{,}9\,(u_n - 2500)$

$= 0{,}9 \,.\, v_n$

Puis $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$

D'où $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}9 \text{ et de premier terme } v_0 = -1500}$

b) D'après la question précédente, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = v_0 \cdot q^n \iff \boxed{v_n = -1500 \times 0{,}9^n}$

Puis on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = u_n - 2500$

$\iff u_n = v_n + 2500$

$\iff \boxed{u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2500}$

c) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $|q| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Puis par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} -1500 \times 0{,}9^n = -1500 \times \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Et par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 + 2500 = \boxed{2500}$

Le nombre d'abonnés de l'influenceuse va croître ((u_n) est croissante) jusqu'à se rapprocher de 2500 (à très long terme)

Rem : Comme nous avons prouvé dans la question 4.c) que (u_n) converge, on aurait également pu utiliser le théorème du point fixe pour obtenir la limite ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 0,9.u_n + 250 = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

$$\Leftrightarrow 0,9.\ell + 250 = \ell$$

$$\Leftrightarrow 0,1\ell = 250$$

$$\Leftrightarrow \ell = 2500$$

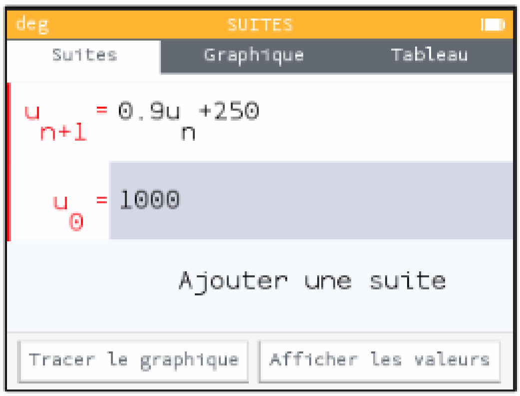
6) Différentes possibilités s'offrent à nous pour le script. En voici quelques-unes qui renvoient toutes le même résultat : $\boxed{2036}$

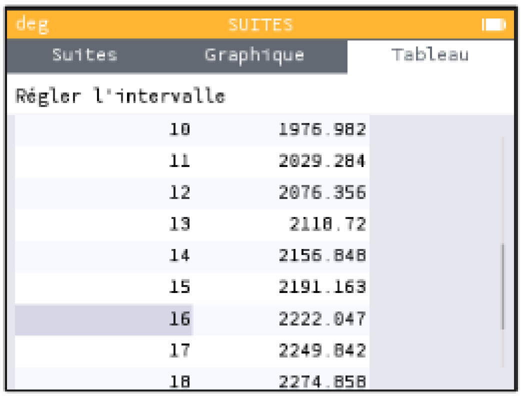
```python
def seuil():
    u=1000
    n=0
    while u<=2200:
        n=n+1
        u=2500-1500*0.9**n
    return 2020+n

def seuil2():
    n=0
    while suite(n)<=2200:
        n=n+1
    return 2020+n
```

```python
def seuil3(abonn):
    u=1000
    n=0
    while u<=abonn:
        n=n+1
        u=2500-1500*0.9**n
    return 2020+n

def seuil4(abonn):
    n=0
    while suite(n)<=abonn:
        n=n+1
    return 2020+n
```

```
>>> seuil()
2036

>>> seuil2()
2036

>>> seuil3(2200)
2036

>>> seuil4(2200)
2036
```

Rem 1 : Si vous êtes bloqués en Python, vous pouvez également utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice, sachant que (u_n) est croissante





Rem 2 : On pouvait également trouver le résultat par calcul :

$$u_n > 2200 \iff -1500 \times 0{,}9^n + 2500 > 2200$$
$$\iff -1500 \times 0{,}9^n > -300$$
$$\iff 0{,}9^n < \frac{1}{5}$$
$$\iff \ln(0{,}9^n) < \ln 0{,}2$$
$$\iff n \cdot \ln 0{,}9 < \ln 0{,}2$$
$$\iff n > \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}9} \quad \text{) car } \ln 0{,}9 < 0$$

On a $\frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}9} \simeq 15{,}3$ et $n \in \mathbb{N}$ donc on prend $n = 16$

qui donne l'année $2020 + n = 2036$

Ex 2 :

⚠ le R.O.N. est $(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et non $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

→ Partie I :

1) Dans le R.O.N., on a : $R\begin{pmatrix}8\\2\\8\end{pmatrix}$; $P\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\times 8\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{P\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}}$

$Q\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{4}\times 8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{Q\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}}$

2) Dans le R.O.N., on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$

Puis $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 1\times(-6)+(-5)\times 0 + 1\times 6 = -6+0+6 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\vec{n}.\overrightarrow{PR} = 1\times 2 + (-5)\times 2 + 1\times 8 = 2-10+8 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ non colinéaires et dirigeant le plan (PQR). Ainsi, $\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } (PQR)}$

3) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ est normal à (PQR), donc (PQR) a une eq. de la forme :

$1\times x + (-5)\times y + 1\times z + d = 0 \Leftrightarrow x - 5y + z + d = 0$

Puis $P\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \in (PQR)$ donc $x_P - 5y_P + z_P + d = 0 \Leftrightarrow 6-0+0+d=0 \Leftrightarrow d=-6$

Ainsi, (PQR) a pour équation cartésienne : $\boxed{x-5y+z-6=0}$

Rem : On pouvait également développer $\vec{n}.\overrightarrow{PM} = 0$ avec $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-6\\y\\z\end{pmatrix}$

ou simplement vérifier que les coordonnées des 3 pts P ; Q et R vérifient l'équation donnée.

⇒ Partie II

1) Ω est le centre du cube ABCDEFGH, donc il est le milieu de ses diagonales.

D'où Ω est le milieu de $[AG]$, avec $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_A + x_G}{2} = \dfrac{0+8}{2} = 4 \\ y_\Omega = \dfrac{y_A + y_G}{2} = \dfrac{0+8}{2} = 4 \\ z_\Omega = \dfrac{z_A + z_G}{2} = \dfrac{0+8}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\Omega\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}}$$

2) $d \perp (PQR)$ donc d est dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ normal à (PQR)

Comme $\Omega\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \in d$, on a :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

⚠ Ne pas oublier

3) L est le projeté orthogonal de Ω sur (PQR) et $d = (\Omega, \vec{n})$

Donc $L = (PQR) \cap d$

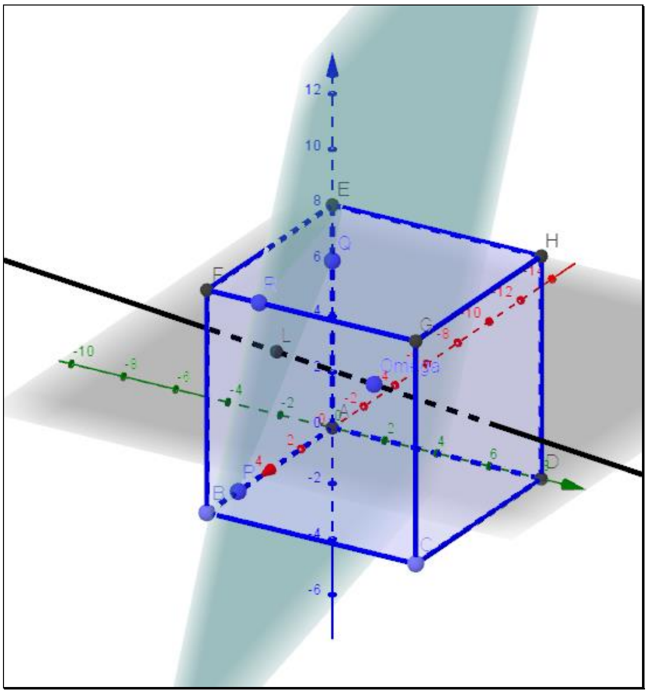
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_L - 5y_L + z_L - 6 = 0 \\ x_L = 4 + t_L \\ y_L = 4 - 5t_L \\ z_L = 4 + t_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + t_L - 5(4 - 5t_L) + 4 + t_L - 6 = 0 \\ x_L = 4 + t_L \\ y_L = 4 - 5t_L \\ z_L = 4 + t_L \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27t_L - 18 = 0 \\ x_L = 4 + t_L \\ y_L = 4 - 5t_L \\ z_L = 4 + t_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_L = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \\ x_L = 4 + t_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y_L = 4 - 5t_L = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ z_L = 4 + t_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \end{cases} \quad \text{D'où } \boxed{L\begin{pmatrix}14/3\\2/3\\14/3\end{pmatrix}}$$

Rem : Comme les coordonnées de L étaient données dans l'énoncé, on aurait pu vérifier que ces coordonnées vérifient les équations de d et (PQR) au lieu de résoudre le système.

4) Comme L est le projeté orthogonal de Ω sur (PQR), on a :

$$\begin{aligned}
\text{dist}\left(\Omega, (PQR)\right) &= \Omega L \\
&= \|\overrightarrow{\Omega L}\| \\
&= \sqrt{\overrightarrow{\Omega L}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{14}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{14}{3}-4\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{-10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4+100+4}{3^2}} \\
&= \frac{\sqrt{108}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{36\times 3}}{3} \\
&= \frac{6\sqrt{3}}{3} \\
&= \boxed{2\sqrt{3}\ \text{cm}}
\end{aligned}$$



Ex 3 :

1)

ⓐ On effectue un tirage simultané de 2 lettres parmi 8.

Le caractère simultané assure qu'il n'y a ni ordre ni remise.

Il s'agit donc d'une combinaison de 2 éléments parmi 8.

Il y a ainsi $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{2} \times \cancel{6!}} = \boxed{28 \text{ tirages possibles}}$

ⓑ On gagne si on a une voyelle (parmi les deux disponibles) et une consonne (parmi les ~~six~~ disponibles). Par principe multiplicatif, il y a ainsi $\binom{2}{1} \times \binom{6}{1} = 2 \times 6 = 12$ tirages gagnants

La probabilité de gagner est ainsi de : $\frac{\text{nb tirages gagnants}}{\text{nb tirages possibles}} = \frac{12}{28} = \boxed{\frac{3}{7}}$

2) ⓐ Loi de probabilité de G :

x_i	$-k$	$10-k$
$P(G=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

ⓑ Le jeu est favorable au joueur $\iff E(G) > 0$

$\iff \frac{4}{7} \times (-k) + \frac{3}{7}(10-k) > 0$

$\iff -4k + 3(10-k) > 0$

$\iff -4k + 30 - 3k > 0$

$\iff 7k < 30$

$\iff k < \frac{30}{7}$

On a $\frac{30}{7} \simeq 4{,}29$ et on veut $k \in \mathbb{N}^*$, donc la valeur maximale de la somme k payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur est de $\boxed{4\text{ €}}$

3) a) On effectue 10 expériences de Bernoulli de manière identique et indépendante, dont la probabilité du succès "le joueur gagne la partie" est égale à $\frac{3}{7}$. Ainsi, X suit la loi Binomiale de paramètres

$n = 10$ et $p = \frac{3}{7}$. $X \sim \mathcal{B}\left(10 ; \frac{3}{7}\right)$

b) $P(X=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \times \left(1-\frac{3}{7}\right)^{10-4} \boxed{\simeq 0,247}$ (à 10^{-3} près)

c) $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \boxed{\simeq 0,440}$ (à 10^{-3} près)

⚠ Ne pas oublier le "0"

Ceci signifie que la probabilité qu'il y ait au moins 5 gagnants est d'environ 0,440 (à 10^{-3} près)

d) ⚠ D'habitude, on nous demande $P(X \geqslant 1) \geqslant \dots$ que nous savons résoudre de façon calculatoire (avec "ln", ...). Ici, la question est du type $P(X \leqslant n) \geqslant \dots$

Il suffit de remarquer qu'il s'agit d'atteindre un seuil pour la fonction de répartition $P(X \leqslant n)$ qui est croissante.

On peut donc essayer à tâtons de déterminer une valeur de n qui permette de franchir le seuil, fixé ici à 0,9.

On lit sur la calculatrice que : $P(X \leqslant 5) \simeq 0,78$ et $P(X \leqslant 6) \simeq 0,92$

Donc il faut choisir $\boxed{n = 6}$

Ex A :

⇒ Partie I

1) Il s'agit de la courbe de f', et non de f

Ainsi, on lit directement $\boxed{f'(0) = \frac{2}{5}}$

⚠ Il ne faut surtout pas tracer la tangente à la courbe au pt d'abscisse 0, sinon on obtiendrait $f''(0)$.

On remarquera par ailleurs que le repère est orthogonal mais pas orthonormé.

2) ⓐ D'après la courbe, avec la précision autorisée par le graphique :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗		↘	

ⓑ D'après le tableau précédent, f' est croissante sur $[-2 ; 1]$, donc

$\boxed{f \text{ est convexe sur } [-2 ; 1]}$

⇒ Partie II $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$

1) On a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ Par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

La fct $x \mapsto x^2+x+\frac{5}{2}$ est une fct polynôme qui se comporte à l'infini comme son monôme de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+\frac{5}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\left(\text{ou } \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+\frac{5}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}\right) = +\infty \text{ car } \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{2x^2} = 0 \right)$

Puis par composition, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

2) Etudions la dérivabilité de f.

Par composition, f est dérivable sur tout intervalle vérifiant que $x^2+x+\frac{5}{2} > 0$

or il s'agit d'une fct trinôme de discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times1\times\frac{5}{2} = 1-10 = -9 < 0$

et comme le coefficient dominant est positif, $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+\frac{5}{2} > 0$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puis $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}}$

3) Comme on a vu que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+\frac{5}{2} > 0$, f' est du signe de $2x+1$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}+2\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \simeq 0{,}81 < 2$

4) a) f est continue (car dérivable) et <u>strictement</u> croissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

On a $f\left(\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\right) = \left[\ln\left(\frac{9}{4}\right);+\infty\right[$ et $2\in f\left(\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation

$\boxed{f(x)=2 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[}$

b) Par balayage, on a : $f(1) \simeq 1{,}50$ et $f(2) \simeq 2{,}14$

puis $f(1{,}7) \simeq 1{,}96$ et $f(1{,}8) \simeq 2{,}02$

puis $f(1{,}76) \simeq 1{,}996$ et $f(1{,}77) \simeq 2{,}002$

Donc $\alpha \in \left]1{,}76 \,;\, 1{,}77\right[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 1{,}8 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$

5) On admet que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$

Comme on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$, alors f'' est du signe de son numérateur $-2x^2 - 2x + 4$

$x_1 = 1$ est racine évidente car la somme des coefficients est nulle,

puis $x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{-2} \iff 1 \times x_2 = -2 \iff x_2 = -2$

D'où $-2x^2 - 2x + 4 = -2(x-1)(x+2)$

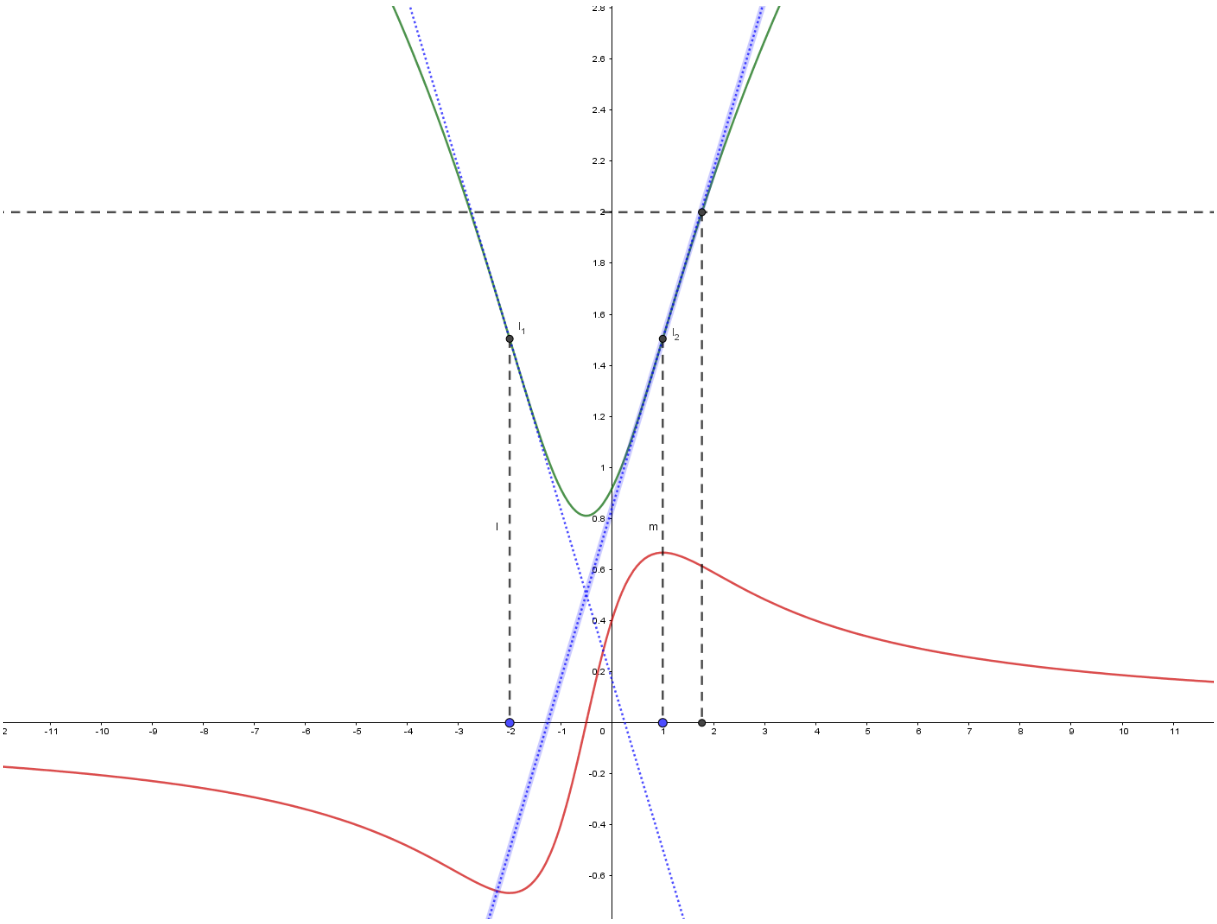
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	inflexion	convexe	inflexion	concave	

← identique à $-2x^2 - 2x + 4$

f'' s'annule <u>et</u> change de signe en -2 et en 1

Les pts de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 et 1 sont donc $\boxed{\text{les 2 seuls pts d'inflexion de } \mathcal{C}_f}$

Pour information : $I_1 \begin{pmatrix} -2 \\ \ln\left(\frac{9}{2}\right) \end{pmatrix}$ et $I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ln\left(\frac{9}{2}\right) \end{pmatrix}$ sont les pts d'inflexion


I1
I2
l
m

Ex B :

⇒ Partie I : On considère l'eq. diff : $y' = -0,4y + 0,4$ (E)

1) ⓐ On sait que la fct $t \mapsto -\frac{b}{a}$ est sol. part. de l'eq. diff. $y' = ay + b$

Donc $t \mapsto -\frac{0,4}{-0,4}$ i.e. $t \mapsto 1$ est une solution particulière de (E)

ⓑ L'équation différentielle homogène associée admet pour sol. générale :

$t \mapsto \lambda e^{-0,4t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc (E) admet pour solution l'ensemble des fonctions de la forme :

$\boxed{t \mapsto \lambda e^{-0,4t} + 1 \quad , \lambda \in \mathbb{R}}$

ⓒ $g(0) = 10$ et g sol. de (E) $\iff \lambda . e^{-0,4 \times 0} + 1 = 10$

$\iff \lambda = 9$

Donc $\boxed{g : t \mapsto 9e^{-0,4t} + 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ (d'après l'énoncé)

⇒ Partie II : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}$

1) On a : $\lim_{t \to +\infty} e^{-0,4t} = 0$ puis par produit et somme : $\lim_{t \to +\infty} 1 + 9e^{-0,4t} = 1$

Par passage à l'inverse, on obtient $\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 1}$

2) D'après l'énoncé, p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $p'(t) = -\frac{9 \times (-0,4) \times e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2} = \boxed{\frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}}$

Rappel : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

3) ⓐ L'énoncé nous invite par sa formulation à utiliser le théorème de la bijection, mais nous pourrons faire mieux : Nous savons résoudre l'équation !!!

$$p(t) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{1+9e^{-0,4t}} = \frac{1}{2} \iff 1 + 9\,e^{-0,4t} = 2$$

$$\iff 9\,e^{-0,4t} = 1$$

$$\iff e^{-0,4t} = \frac{1}{9}$$

$$\iff \ln\left(e^{-0,4t}\right) = \ln \frac{1}{9}$$

$$\iff -0,4t = -\ln 9$$

$$\iff t = \frac{\ln 9}{0,4}$$

$$\iff t = \frac{5 \ln 9}{2} \qquad \boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\ln 9}{2} \right\}}$$

ⓑ Pas besoin de balayage puisque nous avons la valeur exacte :

$$t = \frac{5\ln 9}{2} \ \boxed{\simeq 5,5 \ (\text{à } 10^{-1} \text{ près})}$$

Pour info, avec le corollaire du TVI :

On a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p'(t) = \dfrac{3,6\,e^{-0,4t}}{\left(1+9\,e^{-0,4t}\right)^2} > 0$ donc p est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Par ailleurs, p est continue car dérivable sur $\mathbb{R}_+$

On a $p(0) = \dfrac{1}{g(0)} = \dfrac{1}{10}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 1$

Donc $p(\mathbb{R}_+) = \left[\frac{1}{10} ; 1\right[$ qui comprend $\frac{1}{2}$, i.e. $\frac{1}{2} \in p(\mathbb{R}_+)$

D'après le th. de la bijection (corollaire du TVI), $\boxed{\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ p(\alpha) = \frac{1}{2}}$

On a $p(5) \simeq 0,45$ et $p(6) \simeq 0,55$ donc $\alpha \in]5;6[$

puis $p(5,4) \simeq 0,491$ et $p(5,5) \simeq 0,501$ donc $\alpha \in]5,4;5,5[$

puis $p(5,49) \simeq 0,4997$ et $p(5,50) \simeq 0,5007$ donc $\alpha \in]5,49;5,50[$

D'où $\boxed{\alpha \simeq 5,5}$ (à 10^{-1} près)

⇒ Partie III

1) Soit (E') : $y' = 0{,}4\, y\,(1-y)$ et $y(0) = \frac{1}{10}$

Vérifions que p est solution de (E') et vérifie la condition initiale

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0{,}4\, p(t) \times (1 - p(t)) = 0{,}4 \times \frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}} \times \left(1 - \frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}}\right)$

$$= 0{,}4 \times \frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}} \times \frac{\cancel{1}+9e^{-0{,}4t}\cancel{-1}}{1+9e^{-0{,}4t}}$$

$$= \frac{3{,}6\, e^{-0{,}4t}}{1+9e^{-0{,}4t}}$$

$= p'(t)$ d'après la partie II, question 2)

Donc $\boxed{\text{p est sol. de } (E')}$

De plus, $p(0) = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{10}$ donc $\boxed{\text{la condition initiale est vérifiée}}$

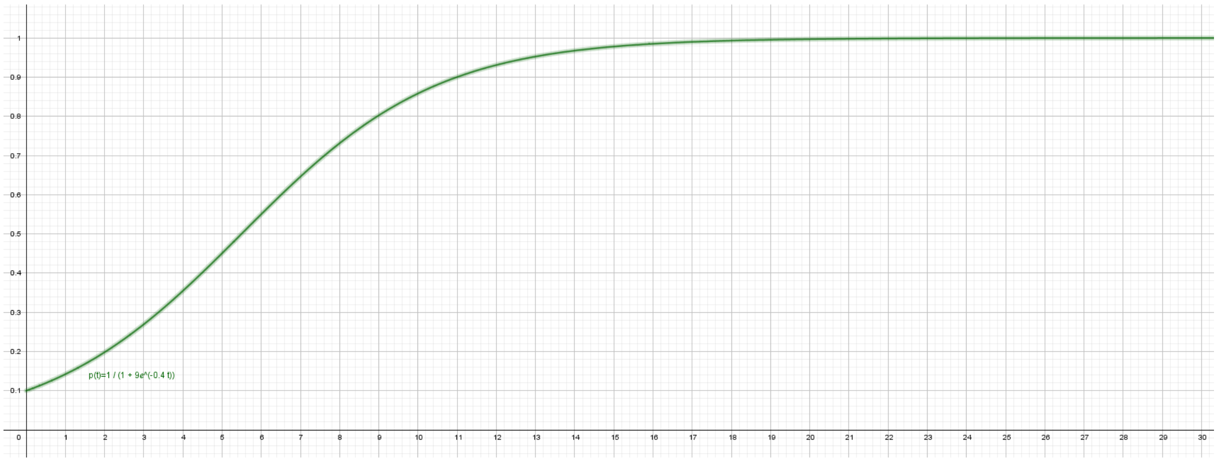
2) On a :

* $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 1$ $\boxed{\text{qui signifie qu'à long terme, toutes les écoles auront accès à Internet.}}$

* $p(\alpha) = \frac{1}{2}$ avec $\alpha \simeq 5{,}5$ $\boxed{\text{qui signifie qu'après 5 ans et } \tfrac{1}{2}\text{, i.e. au milieu de l'année 2025, la moitié des écoles seront connectées.}}$

* $p(0) = 0{,}1$ $\boxed{\text{qui signifie qu'initialement, en 2020, seules 10\% des écoles étaient reliées à Internet}}$

Rem : La fonction p utilisée dans cet exercice est une fonction dite "logistique". Ces fcts ont été mises en évidence au XIX$^{\text{ème}}$ siècle par Verhulst pour son modèle éponyme en dynamique des populations. La fonction logistique la plus épurée est connue en Mathématiques sous le nom de fonction "sigmoïde".


p(t)=1 / (1 + 9e^(-0.4 t))
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30