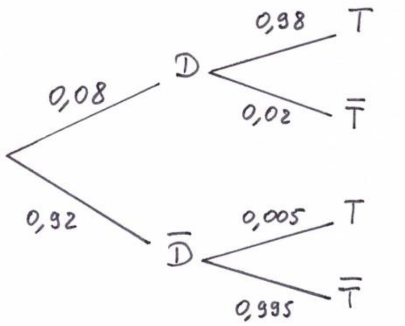
Ex1 :

⇒ Partie A

1)



2) $\{D ; \bar{D}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) = P(D) \times P_D(T) + P_{\bar{D}} \times P_{\bar{D}}(T)$$

$$= 0{,}08 \times 0{,}98 + 0{,}92 \times 0{,}005$$

$$= 0{,}0784 + 0{,}0046$$

$$= \boxed{0{,}083}$$

3) ⓐ $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0784}{0{,}083} = \dfrac{392}{415}$ $\boxed{\simeq 0{,}945}$ à 10^{-3} près

ⓑ D'après la question précédente, $P_T(D) < 0{,}95$

Donc $\boxed{\text{le laboratoire ne commercialisera pas le test.}}$

⇒ Partie B

1) ⓐ On répète 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'athlète présente un test positif" est de 0,103.
Ainsi X suit la loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}103$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(5\,;0{,}103)}$

ⓑ $E(X) = n \times p = 5 \times 0{,}103 = \boxed{0{,}515}$

Ceci signifie que sur un grand nombre de contrôles, il y aura "en moyenne" $\frac{1}{2}$ athlète contrôlé positif sur les 5, i.e. environ 1 athlète contrôlé positif pour 10 athlètes contrôlés.

ⓒ On cherche $P(X \geqslant 1)$

On a $P(X=0) = \binom{5}{0} \times 0{,}103^0 \times (1-0{,}103)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}897^5 \simeq 0{,}581$ à 10^{-3} près

D'où $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \simeq 1 - 0{,}581 \boxed{\simeq 0{,}419}$ à 10^{-3} près

2) Pour n athlètes contrôlés, on a $P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0{,}103^0 \times (1-0{,}103)^{n-0} = 0{,}897^n$

Puis on veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}75$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 - P(X=0) \geqslant 0{,}75 \\
&\iff 1 - 0{,}897^n \geqslant 0{,}75 \\
&\iff 0{,}897^n \leqslant 0{,}25 \\
&\iff \ln(0{,}897^n) \leqslant \ln(0{,}25) \\
&\iff n \cdot \ln(0{,}897) \leqslant \ln(0{,}25) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}897)} \quad \text{car } \ln(0{,}897) < 0
\end{aligned}$$

Or on a $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}897} \simeq 12{,}8$ et on veut $n \in \mathbb{N}$

Il faudra donc contrôler $\boxed{\text{au moins 13 athlètes.}}$

Ex 2 :

Soit (u_n) : $u_0 = 0,6$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,75\, u_n\,(1 - 0,15\, u_n)$

1) On a $u_1 = 0,75 . u_0 . (1 - 0,15 . u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,4095$

En 2021, il y aura donc $\boxed{\text{environ 410 individus}}$ sur l'île.

Puis $u_2 = 0,75 . u_1 . (1 - 0,15 . u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) \simeq 0,288$ à 10^{-3} près

En 2022, il y aura donc $\boxed{\text{environ 288 individus}}$ sur l'île.

2) On a : $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0,75x\,(1 - 0,15x)$

La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ comme produit de fcts dérivables sur $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = 0,75\big(1 \times (1 - 0,15x) + x \times (-0,15)\big)$$
$$= 0,75\,(1 - 0,15x - 0,15x)$$
$$= 0,75\,(1 - 0,3x)$$

Puis $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -0,3 \leqslant -0,3x \leqslant 0$

$$\Rightarrow 1 - 0,3 \leqslant 1 - 0,3x \leqslant 1 - 0$$
$$\Rightarrow 0,7 \leqslant 1 - 0,3x \leqslant 1$$
$$\Rightarrow 0,75 \times 0,7 \leqslant 0,75 \times (1 - 0,3x) \leqslant 0,75 \times 1$$
$$\Rightarrow 0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$$

Ainsi, comme f' est strictement positive sur $[0;1]$, on a alors

$\boxed{f \text{ strictement croissante sur } [0;1]}$

Puis $f(0) = 0,75 \times 0 \times (1 - 0,15 \times 0) = 0$

$f(1) = 0,75 \times 1 \times (1 - 0,15 \times 1) = 0,6375$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,6375$

3) On veut $f(x) = x$ et $x \in [0;1]$

$\iff 0{,}75x(1-0{,}15x) = x$ et $x \in [0;1]$

$\iff 0{,}75x(1-0{,}15x) - x = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff x\left(0{,}75(1-0{,}15x) - 1\right) = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff x(0{,}75 - 0{,}1125x - 1) = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff x(-0{,}25 - 0{,}1125x) = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff -x(0{,}25 + 0{,}1125x) = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff x(0{,}25 + 0{,}1125x) = 0$ et $x \in [0;1]$

$\iff (x = 0$ ou $0{,}25 + 0{,}1125x = 0)$ et $x \in [0;1]$

$\iff \left(x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{-0{,}25}{0{,}1125}\right)$ et $x \in [0;1]$

$\iff x = 0$ car $\dfrac{-0{,}25}{0{,}1125} = -\dfrac{20}{9} \notin [0;1]$

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$

4) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ $\quad \mathcal{P}(n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_1 = 0{,}4095 \end{cases}$ Puis $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ et mq $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

On sait que f est strict. croissante sur $[0;1]$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 0{,}6375$

Puis on a : $\underbrace{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}_{HR} \Rightarrow f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ car f strict. croissante sur $[0;1]$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}6375 \leqslant 1 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$

b) D'après la question précédente :

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leqslant u_n & \text{donc } (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n & \text{donc } (u_n) \text{ est minorée (par 0)} \end{cases}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite réelle $\ell \geqslant 0$

c) Par unicité de la limite (th. du point fixe), on sait que ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (car f continue)

D'après la question 3), on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

5) a) D'après l'énoncé, il y a menace d'extinction lorsque la population tombe en dessous de 20 individus (ou égale à 20 individus)

Or d'après la question précédente, (u_n) décroit jusqu'à une limite nulle.

$\boxed{\text{L'intuition du biologiste est donc la bonne.}}$

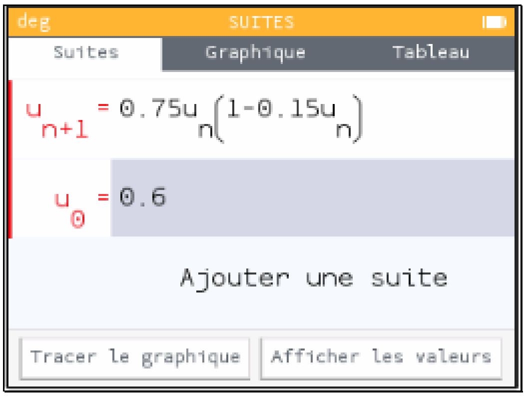
b) La fonction "menace" renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leqslant 0{,}02$, correspondant au seuil de menace d'extinction.

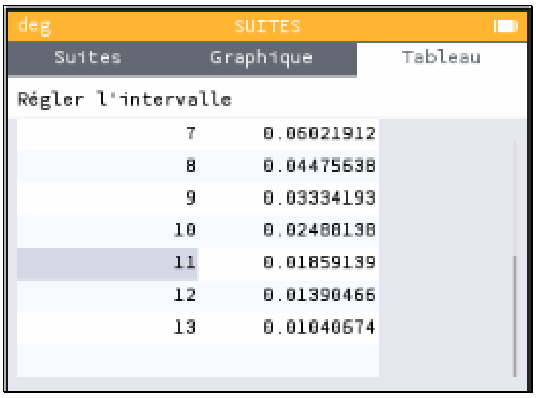
On peut soit saisir le programme Python dans la calculatrice, soit utiliser directement la calculatrice en saisissant (u_n) et en affichant le tableau de valeurs. Dans un cas comme dans l'autre, on trouve $\boxed{n = 11}$

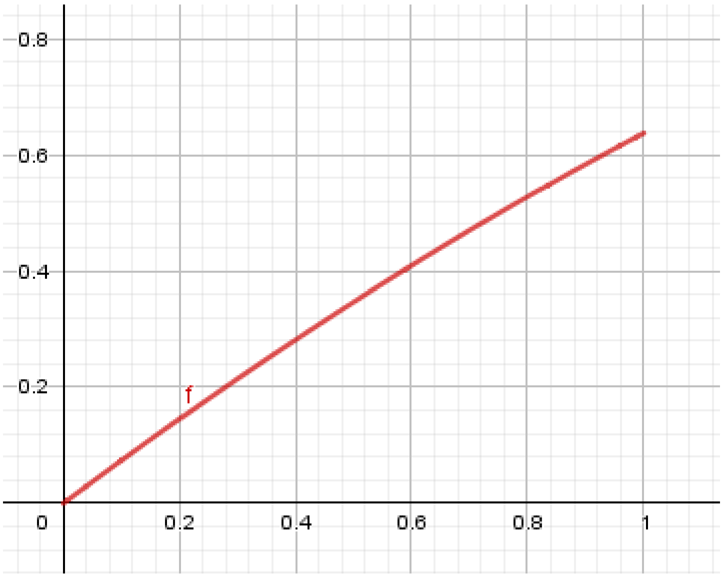
Ainsi, $\boxed{\text{l'espèce sera menacée d'extinction en 2031}}$ d'après le modèle proposé par le biologiste.

```python
def menace():
    u=0.6
    n=0
    while u>0.02:
        u=0.75*u*(1-0.15*u)
        n=n+1
    return n
```

```
>>> menace()
11
```







Ex 3 :

1) On a $A \in (AEB)$ et $I \in (AEB)$, donc $(AI) \subset (AEB)$

De même, $K \in (AED)$ et $H \in (AED)$, donc $(KH) \subset (AED)$

Or $K \in (AE) = (AEB) \cap (AED)$

Ainsi, comme $K \in (AEB)$, la droite parallèle à (AI) et passant par K doit nécessairement avoir tous ses points dans le plan (AEB)

Comme $H \notin (AEB)$, $\boxed{(AI) \text{ et } (KH) \text{ ne sont pas parallèles.}}$

OU Dans le R.O.N. $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Puis $\vec{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (étude de la 1ère coordonnée)

Donc $\boxed{(AI) \text{ et } (KH) \text{ ne sont pas parallèles.}}$

2) a) Dans le R.O.N., on a : $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}$

b) On a : $\vec{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Il apparaît de manière évidente que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE}$ (sinon faire un système)

Un vecteur étant combinaison linéaire des deux autres, ils sont donc coplanaires.

Ainsi, $\boxed{\vec{IJ}, \vec{AE} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont coplanaires.}}$

3) d_1 est dirigée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et d_2 est dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

On a : $\forall k \in \mathbb{R}$, $\vec{u_1} \neq k.\vec{u_2}$ donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires

En effet, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ont la même $1^{ère}$ coordonnée, mais les autres sont différentes (on peut également résoudre un système)

Ainsi, $\boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$

4) Le plan $\mathcal{P}$ d'éq. $x+3y-2z+2=0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Puis dans le R.O.N., $\vec{n}\cdot\vec{u_2} = 1\times1+3\times1+-2\times2 = 1+3-4=0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u_2}$

Ainsi, $\boxed{d_2 \parallel \mathcal{P}}$

5) On a : $L\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \vec{n}$

Donc (LM) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$

Par ailleurs, $x_L+3y_L-2z_L+2 = 4+3\times0-2\times3+2 = 4-6+2=0$ donc $L\in\mathcal{P}$

Ainsi, $\boxed{L\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \text{ est bien le projeté orthogonal de } M\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} \text{ sur } \mathcal{P}}$

Ex A :

$\Rightarrow$ Affirmation 1 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$, $\left(e^{a+b}\right)^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b} \neq e^{2a} + e^{2b}$

$\Rightarrow$ Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2 + (3-x)e^x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit puis somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$

On a $x_A = 0$, puis $\begin{cases} f(x_A) = f(0) = -2 + (3-0).e^0 = -2 + 3 \times 1 = 1 \\ f'(x_A) = f'(0) = (2-0).e^0 = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$

Enfin, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0; f(0))$ a pour équation :

$$y = f'(0).(x-0) + f(0) \iff y = 2x+1$$

$\Rightarrow$ Affirmation 3 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x}$ est une FI du type "$\infty - \infty$"

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = e^x(e^x - 1) + \frac{3}{x}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 1 = +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^x - 1) = +\infty$

Puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0^+$ donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = +\infty$

$\Rightarrow$ Affirmation 4 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Soit la fonction $f : x \longmapsto 1 - x + e^{-x}$ définie sur $[0;2]$

f est dérivable sur $[0;2]$ comme somme de fcts dérivables sur $[0;2]$

$\forall x \in [0;2]$, $f'(x) = -1 - e^{-x} < 0$ car $\forall x \in [0;2]$, $e^{-x} > 0$

Donc f est strictement décroissante sur $[0;2]$

Par ailleurs, $f(0) = 1 - 0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2$ et $f(2) = 1 - 2 + e^{-2} = -1 + e^{-2} \simeq -0{,}9 < 0$

On a $0 \in [f(2) ; f(0)]$, f continue et strictement décroissante sur $[0;2]$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;2]$

(Rem : On aurait aussi pu utiliser le corollaire du th. de Bolzano)

$\Rightarrow$ Affirmation 5 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 5x + e^x$

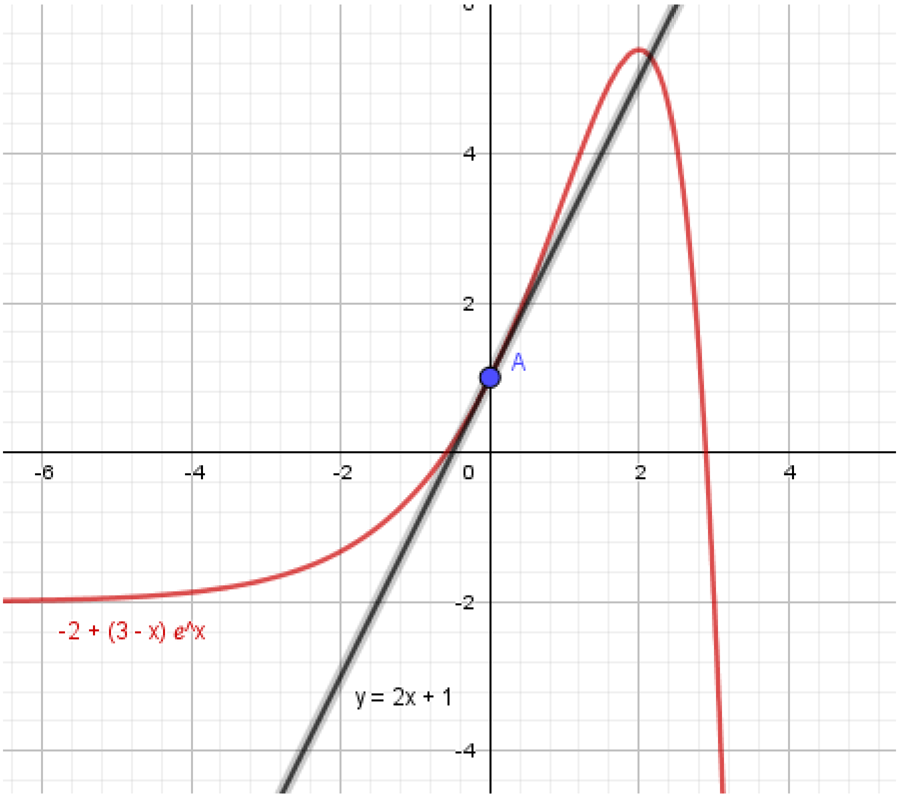
La fct g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

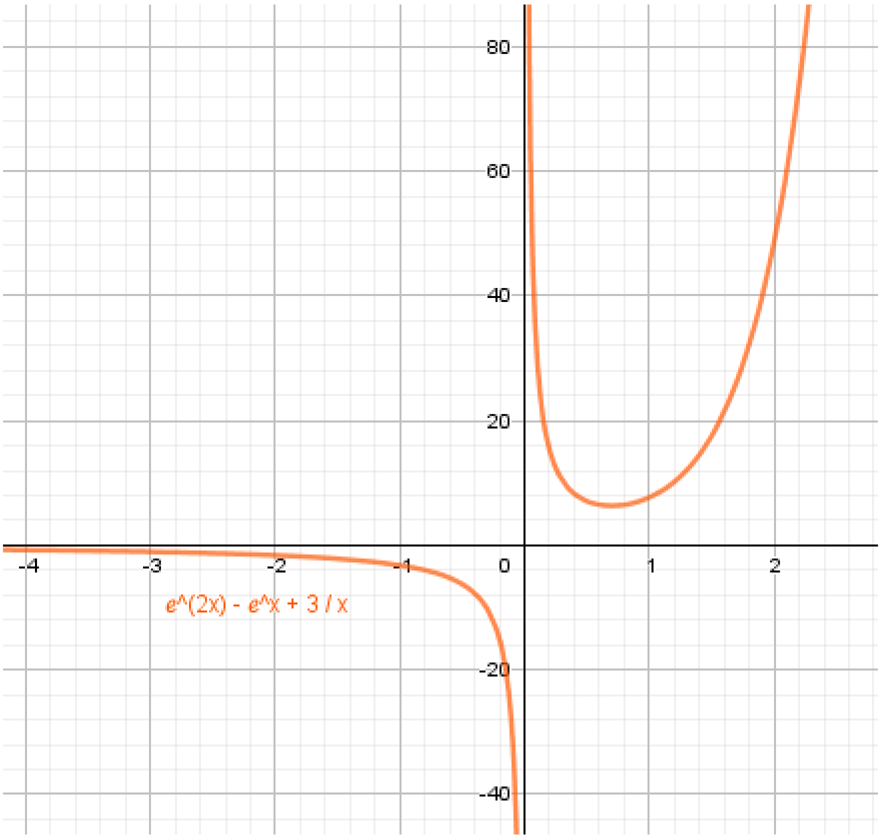
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x - 5 + e^x$

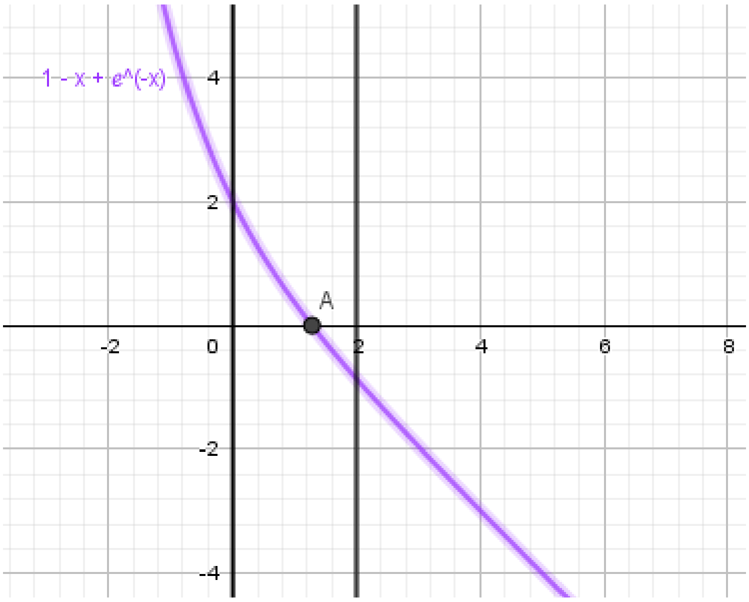
La fct g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

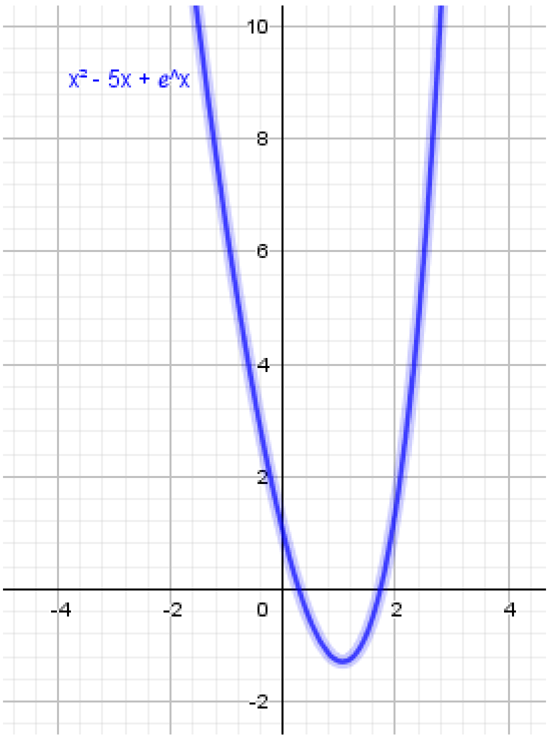
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 2 + e^x > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Donc g est convexe sur $\mathbb{R}$


A
-2 + (3 - x) e^x
y = 2x + 1


e^(2x) - e^x + 3 / x


1 - x + e^(-x)
A
4
2
-2
-4
-2
0
2
4
6
8


x² - 5x + e^x
10
8
6
4
2
-2
-4
-2
0
2
4

Ex B :

1) On lit graphiquement : $\begin{cases} \boxed{f(1) = 4} & \text{ordonnée de } A \\ \boxed{f'(1) = 0} & \text{coeff. dir. de la tangente (horizontale) à } \mathcal{C}_f \text{ en } A \end{cases}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{a + b . \ln x}{x}$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$

D'après l'énoncé, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - (a + b . \ln x) \times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{b - a - b . \ln x}{x^2}}$

3) On a : $\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a + b \times \ln 1}{1} = 4 \\ \dfrac{b - a - b . \ln 1}{1^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = a = 4 \end{cases}$

On a donc : $\boxed{(a ; b) = (4 ; 4)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{4 + 4 \ln x}{x}$

4) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ puis par opérations : $\lim\limits_{x \to 0^+} 4 + 4 \ln x = -\infty$

Par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une F.I. du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{4}{x} + 4 . \dfrac{\ln x}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ (th. croissances comparées) puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 4 . \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0^+$

Donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$

5) D'après les questions 2) et 3), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{-4 \ln x}{x^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, f' est du signe du numérateur.

D'où $f'(x) \geqslant 0 \iff -4 \ln x \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant 0 \iff x \leqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0^+

6) D'après l'énoncé, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -4 \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \cdot \ln x}{(x^2)^2} = -4 \dfrac{x - 2x \ln x}{x^4}$

$= -4 \times \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = \boxed{\dfrac{-4 + 8 \ln x}{x^3}}$

7) On a : $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{-4 + 8 \ln x}{x^3} \geqslant 0$

car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$

$\iff -4 + 8 \ln x \geqslant 0$

$\iff \ln x \geqslant \frac{1}{2}$

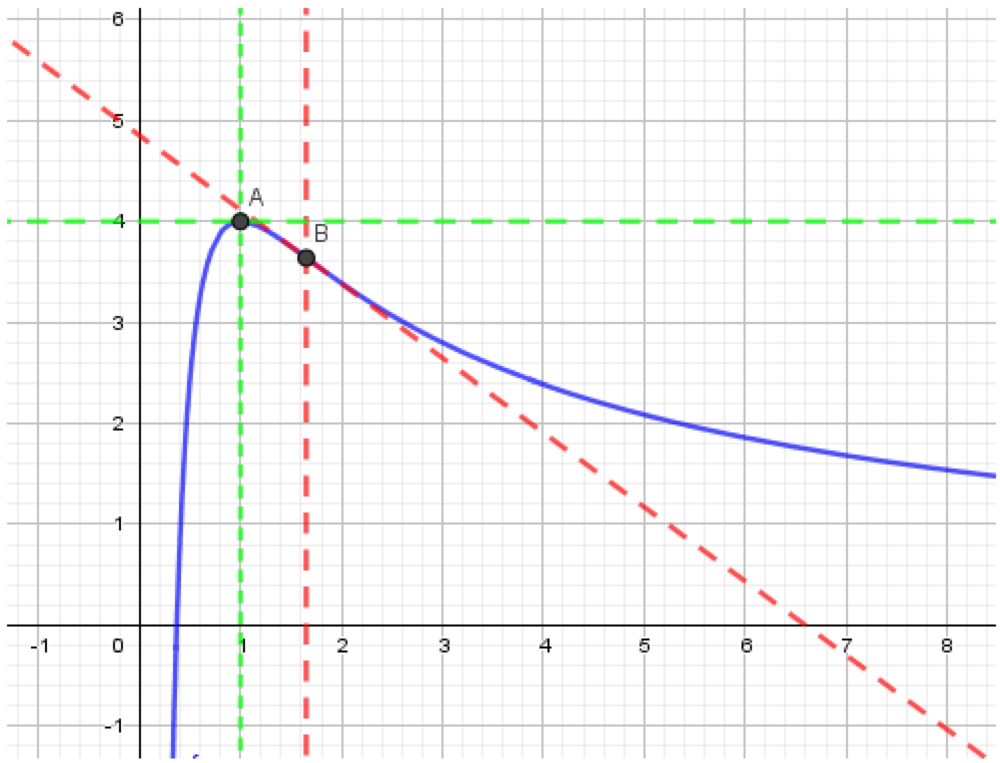
$\iff x \geqslant \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	concave	inflexion	convexe	

$f(\sqrt{e}) = \dfrac{4 + 4 \ln(e^{1/2})}{\sqrt{e}} = \dfrac{4 + 2 \cdot \ln e}{\sqrt{e}} = \dfrac{6}{\sqrt{e}}$

f'' s'annule <u>et change de signe</u> en $\sqrt{e}$ donc $\boxed{B\left(\sqrt{e}\,;\, \frac{6}{\sqrt{e}}\right) \text{ est l'unique pt d'inflexion de } \mathcal{C}_f}$

⚠ $f''(x) = 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour un pt d'inflexion.
Il faut étudier le signe de f'', i.e. la convexité de f


A
B
6
5
4
3
2
1
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8