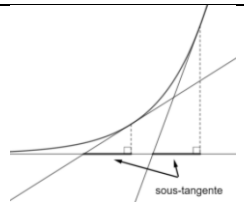
Fiche Grand Oral	Analyse	Equations différentielles	T^{ale}

Bref historique C'est au début du *XV IIème* siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du *XV IIIème* siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernoulli notamment) furent découvertes. Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace …). Aujourd'hui, les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, informatiques, etc.
https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/primitives_equations_differentielles.pdf

I) Applications mathématiques :

Problème de Florimond de Beaune

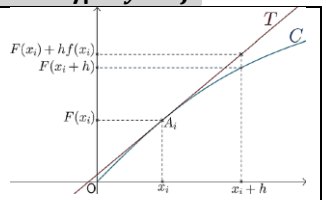
Dans ses commentaires à propos de l'ouvrage La Géométrie de Descartes, Florimond de Beaune propose le problème suivant : Trouver une courbe telle que, en tout point, la sous-tangente C soit constante.



Scientifique : Florimond de Beaune https://publimath.univ-irem.fr/glossaire/BE020.htm

Résolution par la Méthode d'Euler d'équations différentielles du type $y' = f$

Pour certaines fonctions, comme par exemple $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on ne peut pas déterminer une primitive à l'aide de fonctions usuelles. La méthode d'Euler consiste à construire une courbe proche de la courbe représentative de la solution F cherchée.
On a : $F(x_i + h) \simeq F(x_i) + hf(x_i)$
Scientifique : Euler https://youtu.be/19JVOXpFokw



II) Applications diverses de la résolution d'équations différentielles :

Décroissance radioactive

A l'échelle macroscopique, des expériences de comptage permettent de conjecturer que le nombre moyen de noyaux radioactifs d'un échantillon qui se désintègrent sur une courte durée est proportionnelle, à la fois au nombre de noyaux présents à l'instant initial et à la durée d'observation selon la relation : $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$ (λ dépend de l'élément étudié) Manuel Maths Complémentaire Hyperbole : n°116 p 137

*** Datation au carbone 14**

*** Médecine : Imagerie médicale et traitement des cancers**

Des noyaux radioactifs de courte durée sont utilisés en médecine pour l'investigation ou le traitement. Par exemple, l'iode 131 est utilisé pour réaliser des images de la thyroïde. L'appareil à scintigraphie dispose d'une gamma-caméra qui détecte le rayonnement gamma issus de la désintégration de noyaux radioactifs
Scientifique : Henri Becquerel https://youtu.be/clRcF7emyiM

Fiche métier : **Médecin spécialiste en médecine nucléaire**
https://metiers.siep.be/interviews/guiseppa-lupo-medecine-nucleaire/

Quantité d'analgésique depuis le début d'une perfusion

On administre un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu et on souhaite arrêter la perfusion lorsque la quantité de cet analgésique présente dans l'organisme du patient aura atteint un certain seuil. On modélise l'évolution de la quantité d'analgésique en fonction du temps écoulé en minutes depuis le début de la perfusion, par une solution d'une équation différentielle du type : $y' = a(b - y)$
https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/mathematiques/23/3/sujet0_capes_externe_math_EDA_1397233.pdf

Cinétique chimique

On peut étudier par exemple la dismutation de l'eau oxygénée.
L'équation de la réaction chimique est : $2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2$
La concentration de l'eau oxygénée est solution de l'équation différentielle :
$-\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2]$ https://youtu.be/gyTjFOP1kPM

Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement énonce : « la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant », soit :
$\theta' = k(\theta - \theta_0)$ où θ est la température du corps étudié, θ' la vitesse de refroidissement, θ_0 la température ambiante et k une constante négative propre au corps étudié.
(exemple : refroidissement du café placé dans une pièce température ambiante).
Scientifique : Newton https://youtu.be/BqGwnEYxdMM

Modèle de croissance logistique (modèle de Malthus et Verhulst)

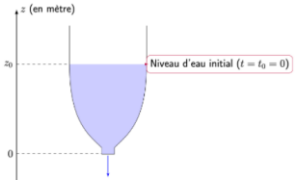
Pour étudier l'évolution d'une population, on peut avoir recours au modèle de Verhulst en 1836. L'effectif de la population est solution de l'équation différentielle : $N'(t) = r\,N(t)$. Ce modèle de Malthus ne répond pas aux contraintes environnementales. L'idée du modèle de Verhulst est de remplacer le taux constant r par un taux variable. L'effectif de la population est alors solution de l'équation différentielle : $N'(t) = r\,N(t)\,(1 - \frac{N(t)}{K})$ est appelée courbe logistique.
Manuel Maths Complémentaire Hyperbole : n°119 p 140
Modèle de Malthus : https://youtu.be/2usZd5Izn9M **Modèle de Verhulst** : https://youtu.be/jqNlwfPDigM

Décharge d'un condensateur

Un condensateur de capacité *C* est chargé sous une tension initiale. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance *R*. La tension aux bornes du condensateur est une fonction *V* du temps *t* solution de l'équation différentielle : $V'(t) + \frac{1}{RC}V(t) = 0$
Manuel Maths Complémentaire Hyperbole : n°117 p 138

Principe de la vidange d'un récipient

Les contextes d'application sont variés : réservoir sans couvercle type « baignoire » ou avec couvercle type « bidon» ; réservoir sous pression type « fusée à eau », « spray aérosol » ou « bonbonne de gaz », ou soumis à une force extérieure type « bouée dégonflée par constriction ».



$z(t)$, niveau d'eau restante en fonction du temps, est solution de l'équation différentielle : $\frac{dz}{dt} = C\sqrt{z}$ (théorème de Bernoulli) où C désigne une constante négative et assurant l'homogénéité de l'équation. (formule de Torricelli)
https://culturemath.ens.fr/thematiques/concours-d-enseignement/aquadiff