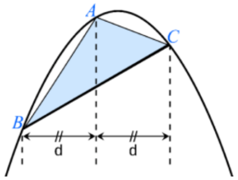
Fiche Grand Oral	Intégration	Aire et volume	T^{ale}

Dès l'antiquité : la méthode d'exhaustion.

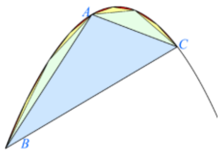
Vocabulaire : **Exhaustion (méthode d'-):** Méthode permettant de calculer ou de vérifier une grandeur au moyen d'approximations de plus en plus précise.

Animation géogébra pour le cercle :
https://www.geogebra.org/m/MYNxGAdj



La Quadrature de la parabole par Archimède (287-212 av. JC)

Dans la figure ci-contre le point A est placé tel que la tangente en A à la parabole soit parallèle à (BC). Archimède affirmait alors que l'aire sous la parabole et au dessus du segment [BC] est égale aux $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC.



Pour cela il réitère la construction au dessus des segments [AC] et [AB] et montre que l'aire cumulé des 2 triangles construits est égale au quart de l'aire du triangle ABC. En réitérant ce procédé il trouve 4 triangles dont l'aire cumulé est le seizième de l'aire de ABC et ainsi de suite il arrive a :

$$\text{Aire parabole} = \text{Aire triangle} \times (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots)$$
$$= \text{Aire triangle} \times \frac{4}{3}$$

Recherches possibles :

- Mise en place de la démonstration avec une parabole simple : y = x² et avec A(0 ;0) , B(-a,a²) et C(a,a²) (ref1)
- Méthode d'exhaustion pour calculer l'aire d'un disque ou le périmètre d'un cercle (ref 2)
- Méthode d'exhaustion pour calculer l'aire d'une figure (ellipse, hyperbole…)
- Approximation de π (ref3)
- Approximation d'une surface terrestre avec les coordonnées GPS (département, île, pays…)

Sitographie :

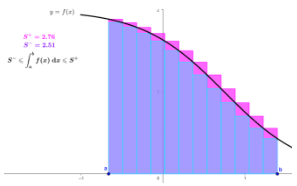
https://hist-math.fr/zenon-auto
http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Parabole.htm (ref 1)
https://www.youtube.com/watch?v=KOPyNmV6a0A (ref 2)
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/hist_mat/textes/mirliton.htm (ref 3)

Méthode des rectangles

Explications : https://www.youtube.com/watch?v=f4nRG70aVO4

Illustration Geogebra : https://www.geogebra.org/m/hwdV4TyX

S'entrainer : https://www.lelivrescolaire.fr/page/6813538



Comparatif / variante : Méthode des trapèzes

https://zestedesavoir.com/tutoriels/472/calcul-approche-dintegrales/performance-et-precision/

Encore plus précis : Méthode de Simpson

https://zestedesavoir.com/tutoriels/472/calcul-approche-dintegrales/la-methode-de-simpson/

Intégrale d'une fonction

Pour maitriser : https://www.youtube.com/watch?v=pFKzXZrMVxs

Essentiel du cours :

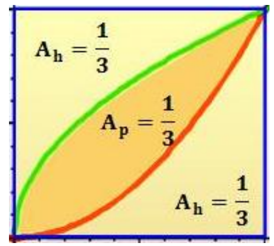
Si un domaine est délimité sur un intervalle [a ; b] par les courbes de deux fonctions "f" et "g" continues telles que sur [a ; b] g(x) ≤ f(x) alors l'aire "A" de ce domaine correspond à l'intégrale de la différence des deux fonctions:

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = F(b) - G(b) + G(a) - F(a)$$

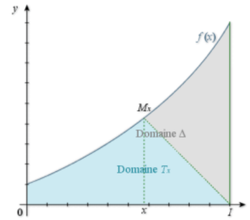
Où F et G sont des primitives de f et g

Recherches possibles :

- Retrouver les formules de collège pour les aires (disque, rectangle, triangle…)
- Trisection du carré par deux paraboles (Archimède) : montrer l'égalité des aires →



- Partage d'aire en deux parties de même surface pour coloriage, bi-matière...→

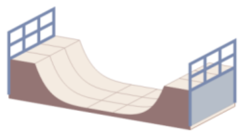


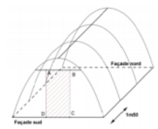
Exemples concrets : https://www.youtube.com/watch?v=fRkdO1BrVTc&t=1149s

Prolongement : Calcul de volume

Cas simple : Volume de type « prisme »

- Voir bac STI2D Antilles Guyane 2018
- Voir bac S Métropole 2019
- Voir bac S Métropole 2015

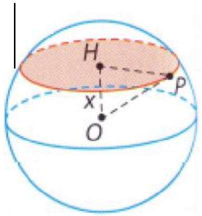




Volume d'un solide de révolution

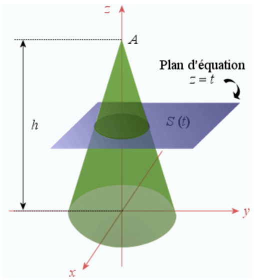
On considère un solide délimité par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ (avec $a < b$)
Tout plan d'équation $z = t$ avec $a<t<b$ coupe ce solide suivant une section d'aire $S(t)$, en unités d'aire.
Lorsque $S : t \to S(t)$ est continue sur $[a ; b]$, le volume V du solide, en unités de volume est

$$V = \int_a^b S(t)dt$$

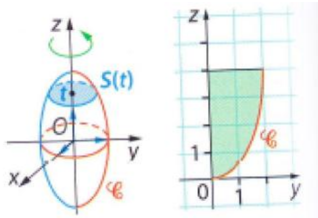


Exemple 1 : volume de la boule
On coupe une boule de centre O et de rayon R par un plan (P) et on appelle x la distance OH de O au plan (P). On appelle D le disque d'intersection.
Retrouver la formule du volume d'une sphère.

Exemple 2 : volume d'un cône
De la même manière que l'exemple, retrouver le volume d'un cône de hauteur h dont la base est un disque de rayon r.

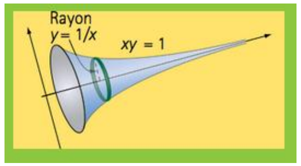


Exemple 3 : cas général
On considère un solide obtenu par la rotation d'une courbe C autour de l'axe (Oz). Dans ce cas, la section du solide avec tout plan d'équation $z = t$ est un disque de rayon $R(t)$. Alors
$S(t) = \pi R(t)^2$
Calculer le volume du solide engendré par la rotation de l'arc de parabole d'équation $z = y^2$ pour y dans $[0 ; 2]$ autour de l'axe (Oz)



Sur le même thème : La trompette de Gabriel (ou de Torricelli)

À l'aide du calcul intégral, on obtient un paradoxe apparent : l'aire de la surface de la trompette est infinie alors que son volume est fini. On pourrait donc remplir la trompette avec une quantité finie de peinture, mais pour en peindre la surface, il en faudrait une quantité infinie.

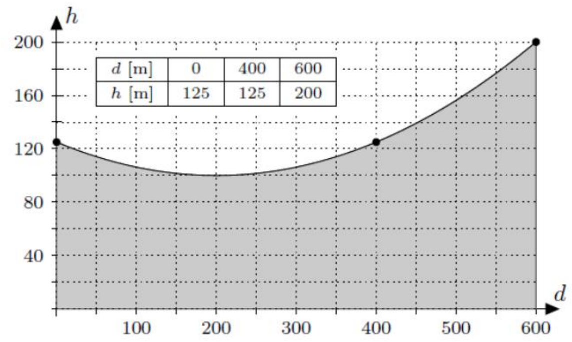


Valeur moyenne

Pour maitriser : https://www.youtube.com/watch?v=oVFHojz5y50

Un exemple d'application :

On voudrait niveler (à plat) le terrain représenté ci-dessous.



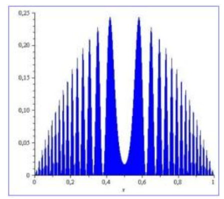
d [m]	0	400	600
h [m]	125	125	200

a) À l'aide des 3 pts obtenus par un géomètre, déterminer la fonction du 2ème degré qui modélise au mieux ce terrain.

b) À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?

Méthode de Monte-Carlo : Pour des surfaces compliquées ?

Exemple : $f(x) = x(1-x)\sin^2(200x(1-x))$



https://tangentex.com/MonteCarlo.htm