Mathsapiens.fr

Bac 1ère

Epreuve Anticipée de Mathématiques

- Spécialité -

Sujet zéro n°1

20 juin 2025

Partie 1

Automatismes – QCM

Automatismes - QCM

$\boxed{1)\ B}$

Soit $a = 5$, on a : $2a = 2 \times 5 = 10$ puis $\frac{1}{2a} = \frac{1}{10}$

$\boxed{2)\ A}$

$$F = a + \frac{b}{c.d} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \times \frac{-1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{-1} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$\boxed{3)\ A}$

On a : $c = 0{,}975$ coefficient multiplicateur

Puis on détermine le taux d'évolution avec la relation $c = 1 + t$

D'où $c = 0{,}975 \iff 1 + t = 0{,}975 \iff t = 0{,}975 - 1 \iff t = -0{,}025$
$\iff t = -2{,}5\,\%$

$\boxed{4)\ C}$

On note $t_1 = 0{,}1$ le taux d'évolution correspondant à l'augmentation de 10%
et $t_2 = -0{,}1$ ——————————— la baisse ———

Le coefficient multiplicateur global c est alors de :

$c = (1 + t_1)(1 + t_2) = 1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99 < 1$

Donc $P_1 = c \times P = 0{,}99 \times P < P$

$\boxed{5)\ A}$

On a : $\sum p_i = 1 \iff 0{,}5 + \frac{1}{6} + 0{,}2 + x = 1$

$\iff x = 1 - 0{,}5 - 0{,}2 - \frac{1}{6}$

$\iff x = 0{,}3 - \frac{1}{6}$

$\iff x = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}$

$\iff x = \frac{9}{30} - \frac{5}{30}$

$\iff x = \frac{4}{30}$

$\iff x = \frac{2}{15}$

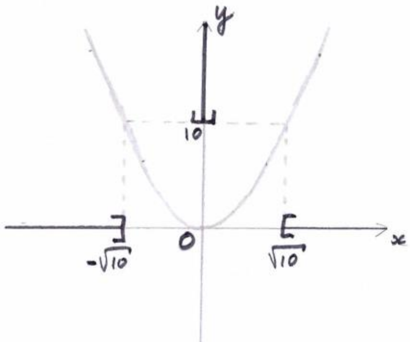
$\boxed{6)\ A}$

Soient x ; y et u des réels non nuls.

On a : $\frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$

Puis $u = \frac{xy}{x+y}$

$\boxed{7)\ B}$



8) D

On peut tester les équations proposées avec les points $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ qui appartiennent à $\mathcal{D}$.

OU On cherche directement l'équation réduite de $\mathcal{D}$: $y = mx + p$

On a l'ordonnée à l'origine $p = 2$ car $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$

Puis $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{3}$

D'où $y = -\frac{2}{3}x + 2$ $\iff$ $\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$ $\times 3$ (pour tester ©)

Ne correspond ni à (a) ni à (b)

$\iff 2x + 3y - 6 = 0$ $\div 6$

$\iff \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$

OU $\mathcal{D} = (AB)$ avec $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Puis $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = 0$ car $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-2\end{pmatrix}$

$\iff \begin{vmatrix} x & 3 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\iff -2x - 3(y-2) = 0$

$\iff -2x - 3y + 6 = 0$ $\div(-6)$

$\iff \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$

9) B

Toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

$f_1(x) = x^2 - (1-x)^2 = x^2 - (1 - 2x + x^2) = 2x - 1$ affine avec $m = 2$ et $p = -1$

$f_2(x) = \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ affine avec $m = \frac{1}{2}$ et $p = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f_3(x) = \dfrac{5 - \frac{2}{3}x}{0,7} = \dfrac{-2}{3\times 0,7}x + \dfrac{5}{0,7}$ affine avec $m = \dfrac{-2}{2,1}$ et $p = \dfrac{5}{0,7}$

$\boxed{10)\ C}$

$\mathcal{P}$ est une parabole donc elle représente une fonction polynôme du second degré : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$

$\mathcal{P}$ est concave (tournée vers le bas) donc $a < 0$ (coefficient dominant)

Ceci élimine la réponse (a)

Puis le coefficient constant c est strictement positive $\mathcal{P} \cap (O, \vec{j})$ se situe au-dessus de $(O, \vec{i})$. Ceci élimine les réponses (b) et (d)

On aurait également pu remarquer la symétrie de $\mathcal{P}$ par rapport à $(O, \vec{j})$, donc la fonction est paire. Ceci implique que $b = 0$, éliminant la réponse (d).

$\boxed{11)\ B}$

$x \times f(x) > 0$ ssi x et $f(x)$ ont le même signe.

On a : $x_A < 0$ et $f(x_A) < 0 \Rightarrow x_A \cdot f(x_A) > 0$

$x_B < 0$ et $f(x_B) > 0 \Rightarrow x_B \cdot f(x_B) < 0$

$x_R > 0$ et $f(x_R) > 0 \Rightarrow x_R \cdot f(x_R) > 0$

$x_S > 0$ et $f(x_S) < 0 \Rightarrow x_S \cdot f(x_S) < 0$

$\boxed{12)\ D}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 15}}{m} = \frac{1 \times 10 + 2 \times 8 + x \times 16}{1 + 2 + x}$$

$\Leftrightarrow (x+3)m = 10 + 16 + 16x$ et $x + 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow 15x + 45 = 26 + 16x$ et $x \neq -3$

$\Leftrightarrow 16x - 15x = 45 - 26$ et $x \neq -3$

$\Leftrightarrow x = 19$ et $x \neq -3$

$\Leftrightarrow x = 19$

Partie 2

Enseignement de spécialité

Ex1:

1) ⓐ Dans le R.O.N. $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a : $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $I\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

ⓑ Puis $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = 4\times 0 + 3\times 4 = 0 + 12 = \boxed{12}$

2) ⓐ On a : $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (OI)

$= \boxed{OI\times OH}$ car $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de même sens

ⓑ Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Donc $OI = \|\overrightarrow{OI}\| = \sqrt{\overrightarrow{OI}^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

ⓒ On a $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = OI\times OH$

D'où $OH = \dfrac{\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}}{OI} = \dfrac{12}{5} = \dfrac{24}{10} = \boxed{2{,}4}$

3) ⓐ $\overrightarrow{OI}$ est normal à (CH) puisque H est le projeté orthogonal de C sur (OI)

Dans le R.O.N., on a $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

D'où $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (CH) \iff \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$ avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\end{pmatrix}$

$\iff 4\times x + 3(y-4) = 0$

$\iff \boxed{4x+3y-12=0}$

ⓞⓤ $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est normal à (CH) donc (CH) a une équation cartésienne de la forme : $4x+3y+c=0$

Puis $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \in (CH) \iff 4x_C + 3y_C + c = 0 \iff 4\times 0 + 3\times 4 + c = 0 \iff c = -12$

D'où (CH) : $\boxed{4x+3y-12=0}$

(b) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $D\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et de rayon $R = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

D'où $\mathcal{E}$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 = R^2 \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$$

Développons cette forme canonique :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff \boxed{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}75 = 0}$$

(c) Testons l'appartenance de $M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix}$ à $\mathcal{E}$ à partir de son équation cartésienne canonique afin de simplifier les calculs :

$$(x_M - 2)^2 + (y_M - 2)^2 = (1{,}5 - 2)^2 + (2-2)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4}$$

Donc $\boxed{M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{E}}$

D'autre part, on a :

$$4x_M + 3y_M - 12 = 4 \times 1{,}5 + 3 \times 2 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$$

Donc $\boxed{M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \in (CH)}$

Conclusion :

On a : $\begin{cases} M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{E} \\ M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \in (CH) \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix} \in \mathcal{E} \cap (CH)}$

Ex 2 :

1) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 5x + 4$

La somme des coefficients est nulle donc $x_1 = 1$ est racine évidente de g.

Puis $x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{1} \iff 1 \times x_2 = 4 \iff x_2 = 4$

OU $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$

puis $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Le coefficient dominant $a = 1$ de ce polynôme du second degré est positif, donc g est convexe et on a :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $A_n \begin{pmatrix} n \\ g(n) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

a_n est le coefficient directeur de $(A_n A_{n+1})$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{y_{A_{n+1}} - y_{A_n}}{x_{A_{n+1}} - x_{A_n}}$

$$= \frac{g(n+1) - g(n)}{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}$$

$$= (n+1)^2 - 5(n+1) + 4 - (n^2 - 5n + 4)$$

$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 - 5n - 5 + \cancel{4} - \cancel{n^2} + 5n - \cancel{4}$$

$$= 2n + 1 - \cancel{5n} - 5 + \cancel{5n}$$

$$= \boxed{2n - 4}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2n - 4$

On reconnait la forme explicite d'une **suite arithmétique** de raison $r = 2$ et de premier terme $a_0 = -4$

On peut également le prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 4 - (2n-4)$$
$$= \cancel{2n} + 2 \cancel{-4} - \cancel{2n} + \cancel{4}$$
$$= 2$$

2) a) $\forall x \in [0{,}5\,;8],\ \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

$$= \frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{4}{x}$$
$$= x - 5 + \frac{4}{x}$$
$$= \boxed{f(x)}$$

b) $\forall x \in [0{,}5\,;8],\ x > 0$ donc f est du signe de g sur $[0{,}5\,;8]$

Comme l'axe des abscisses est la droite d'équation $y = 0$, on obtient directement la position relative de $\mathcal{E}$ par rapport à $(O, \vec{i})$ à partir du tableau de signe de f (et donc de g) sur $[0{,}5\,;8]$:

x	$0{,}5$		1		4		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
position relative		$\mathcal{E}$ au-dessus de $(O, \vec{i})$		$\mathcal{E}$ en dessous de $(O, \vec{i})$		$\mathcal{E}$ au-dessus de $(O, \vec{i})$	

intersection $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ intersection $J\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

ⓒ On admet que f est dérivable sur $[0{,}5\,;\,8]$

$\forall x \in [0{,}5\,;\,8]$, $f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$

D'où $\forall x \in [0{,}5\,;\,8]$, $f'(x) = 1 - 0 + 4 \times \dfrac{-1}{x^2}$

$$= 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2^2}{x^2}$$

$$\boxed{= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}}$$

ⓓ $\forall x \in [0{,}5\,;\,8]$, $x^2 > 0$ et $x+2 > 0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$ sur $[0{,}5\,;\,8]$

Soit $x \in [0{,}5\,;\,8]$, on a : $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

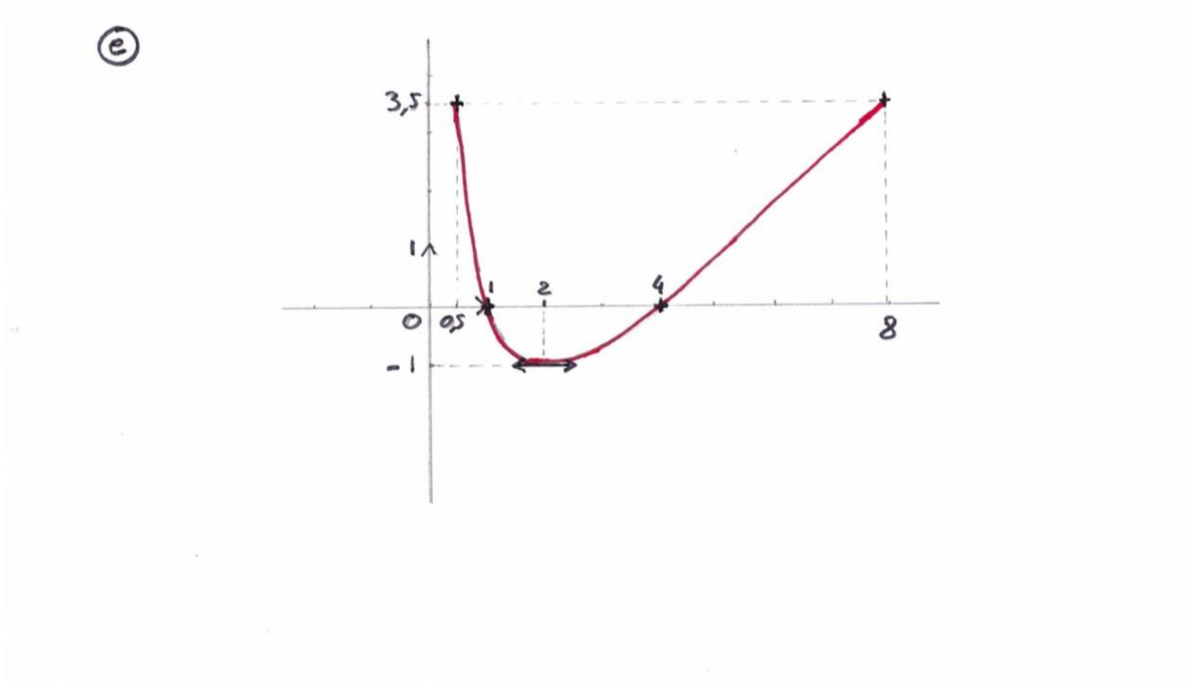
D'où le tableau de variations de f :

x	$0{,}5$		2		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3{,}5$		-1		$3{,}5$

On a : $f(0{,}5) = 0{,}5 - 5 + \dfrac{4}{0{,}5} = -4{,}5 + \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = -4{,}5 + 4 \times 2 = -4{,}5 + 8 = 3{,}5$

$f(2) = 2 - 5 + \dfrac{4}{2} = -3 + 2 = -1$

$f(8) = 8 - 5 + \dfrac{4}{8} = 3 + \dfrac{1}{2} = 3{,}5$



Pour information, voici la représentation graphique de f obtenue avec Geogebra :